Лабораторная работа № 3
по курсу "Спецпроцессоры"

Устройство для решения систем линейных алгебраических уравнений

Цель работы: разработать схему устройства, реализующего QR-разложение матрицы, исследовать его работу средствами САПР ПЛИС Quartus II.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

нужно найти матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$, обратную $\boldsymbol{A}$, тогда решение определяется из соотношения:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{2}$$

Отыскание обратной матрицы является сложной итерацией, поэтому на практике часто используют прием, при котором матрица $\boldsymbol{A}$ представляется в виде произведения:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_1A_2}. \tag{3}$$

В этом случае из (2):

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A_1A_2})^{-1}=\boldsymbol{A_2}^{-1}\boldsymbol{A_1}^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{4}$$

и, если $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{A_2}$ имеют специальный вид, вычисление (4) может оказаться значительно проще (2). На практике наиболее часто применяется LU-разложение (метод Гаусса), QR-разложение (метод Гивенса), разложение Холецкого и ряд других.

QR-разложением действительной матрицы $\boldsymbol{A}$ называется произведение $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$, где Q – ортогональная матрица, R – правая треугольная. Для ортогональной матрицы $Q^{-1}=Q^T$, то есть обратная матрица равна транспонированной.

Решение (2) заменяется на:

$$\begin{cases} y=Q^{-1}b=Q^T b, \\ x=R^{-1}y, \end{cases} \tag{5}$$

в котором транспонированная матрица не требует вычисления, поскольку состоит из тех же компонентов, что и исходная, а умножение на матрицу, обратную правой треугольной легко реализуется при помощи процедуры, называемой обратной подстановкой.

Матрица C_{ij}, где $i<j$, размерности N, отличающаяся от единичной компонентами $c_{ii} = c_{jj} = \cos\alpha$, $c_{ij} = -c_{ji} = -\sin\alpha$, называется матрицей вращения Гивенса. Легко проверить, что данная матрица является унитарной. Как известно, умножение на такую матрицу легко реализуется при помощи алгоритма CORDIC.

Пусть

$$\alpha_{12}=arctg\frac{a_{21}}{a_{11}} \quad - \tag{6}$$

параметр матрицы Гивенса C_{12} той же размерности, что и исходная матрица A. Данный угол может быть легко найден при помощи процессора CORDIC в векторном режиме. При умножении данной матрицы на A получается A', у которой двумерные векторы с компонентами в 1-й и 2-й строках поворачиваются на угол α_{12}, компонент $a'_{21} = 0$ − обнуляется, а остальные компоненты остаются неизменными. Такое умножение может быть выполнено при помощи ряда операций CORDIC. Аналогично, вычисляем матрицы C_{13} ... C_{1N} и обнуляем все компоненты 1-го столбца матрицы $A^{(N-1)}$, расположенные под 1-м элементом.

После этого возьмем в качестве параметра C_{23}:

$$\alpha_{23} = arctg\frac{a_{32}^{(N-1)}}{a_{22}^{(N-1)}} \tag{7}$$

При умножении C_{23} на $A^{(N-1)}$ получем матрицу $A^{(N)}$, у которой $a_{32}^{(N)} = 0$ − обнуляется, а элементы $a_{21}^{(N)}=a_{21}^{(N-1)}=0$ и $a_{31}^{(N)}=a_{31}^{(N-1)}=0$ − остаются неизменными, поскольку при повороте нулевого вектора на любой угол получается нулевой вектор. Аналогично, матрицы C_{24} ... C_{2N} позволяют получить матрицу, у которой элементы второго столбца, начиная с 3-го, обнуляются, а элементы 1-го столбца остаются нулевыми, то есть получается матрица, у которой элементы в первых двух столбцах под главной диагональю – нули.

Продолжая данную процедуру получаем правую треугольную матрицу:

$$\left(\prod_{1\le i<j\le N} C_{ij}\right)A=R\quad. \tag{8}$$

Поскольку произведения ортогональных матриц является ортогональной матрицей, получаем:

$$Q^T=\prod_{1\le i<j\le N} C_{ij}\quad. \tag{9}$$

Из (5) и (9) следует:

$$\left(\prod_{i,j} C_{ij}\right)b=y\quad. \tag{10}$$

Учитывая, что алгоритм CORDIC удлиняет преобразуемые векторы и что каждая строка матрицы в результате циклического перебора всех пар строк матрицы будет преобразована (N−1) раз, получаем, что будет выполнено преобразование:

$$K^{N-1}\left(\prod_{1\le i<j\le N} C_{ij}\right)A=K^{N-1}R\quad, \tag{11}$$

где K – коэффициент удлинения одного преобразования CORDIC.

Параллельно с преобразованием матрицы A можно выполнять преобразование вектора b:

$$K^{N-1}\left(\prod_{1\le i<j\le N} C_{ij}\right)b=K^{N-1}y\quad. \tag{12}$$

Уравнение

$$K^{N-1}\boldsymbol{Rx}=K^{N-1}\boldsymbol{y} \tag{13}$$

имеет то же решение, что и (5), а, следовательно, что и исходная система (1). Преобразования (11) и (12) в неявном виде вычисляют QR-разложение матрицы A. Данный пример также демонстрирует случай, когда удлинение, даваемое алгоритмом CORDIC никак не влияет на конечный результат.

Для решения (13) применяют процедуру, называемую обратной подстановкой:

$$\begin{cases} x_N=\dfrac{y_N}{r_{N,N}} \\ x_{N-1}=\dfrac{y_{N-1}-r_{N-1,N}\,x_N}{r_{N-1,N-1}} \\ \ldots \\ x_i=\dfrac{y_i-\sum\limits_{j=i+1}^{N} r_{i,j}\,x_j}{r_{i,i}} \\ \ldots \end{cases} \tag{14}$$

Процедура (14) может быть реализована при помощи процессора CORDIC в линейном режиме. Для этого сделаем следующие обозначения:

$$
\begin{cases}
\rho_{N+1,j} = y_j,\; N \ge j \ge 1, \\
\rho_{N,N} = \dfrac{\rho_{N+1,N}}{r_{N,N}} = x_N, \\
\rho_{N,j} = \rho_{N+1,j} - \rho_{N,N} r_{N,j},\; N > j \ge 1, \\
\rho_{N-1,N-1} = \dfrac{\rho_{N,N-1}}{r_{N-1,N-1}} = x_{N-1}, \\
\rho_{N-1,j} = \rho_{N,j} - \rho_{N-1,N-1} r_{N-1,j},\; N-1 > j \ge 1, \\
\ldots \\
\rho_{i,i} = \dfrac{\rho_{i+1,i}}{r_{i,i}} = x_i,\; N \ge i \ge 1, \\
\rho_{i,j} = \rho_{i+1,j} - \rho_{i,i} r_{i,j},\; i > j \ge 1, \\
\ldots \\
\rho_{11} = \dfrac{\rho_{21}}{r_{11}} = x_1\;.
\end{cases}
\tag{15}
$$

Операции вида $\rho_{i,i} = \dfrac{\rho_{i+1,i}}{r_{i,i}} = x_i$ можно выполнить при помощи линейных устройств CORDIC в режиме вычисления, а операции $\rho_{i,j} = \rho_{i+1,j} - \rho_{i,i} r_{i,j}$ – при помощи линейных устройств CORDIC в режиме приложения.

Порядок выполнения работы

1. Синтезировать схему арифметического устройства для выполнения QR-разложения матрицы 4x4 без явного вычисления матрицы $\boldsymbol{Q}$ (на входе – $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$, на выходе – $K^3\boldsymbol{R}$ и $K^3\boldsymbol{y}$). При синтезе данной схемы и всех последующих возможно использование языка VHDL.

2*. (Кроме студентов вечернего факультета) Разработать схему устройства для реализации обратной подстановки с использованием алгоритма CORDIC в линейном режиме.

3*. (Кроме студентов вечернего факультета) Объединить две полученные схемы в устройство для решения СЛАУ.

Содержание отчета

Протокол работы должен содержать схемы разработанных устройств и временные диаграммы их работы. При реализации устройств средствами языка VHDL приводится текст программы.