ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра прикладной математики и информационных технологий

С.Л.Блюмин, И.А.Шуйкова

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Липецк 1999

Введение

Окружающий нас мир поразительно сложен. И в любой профессиональной области деятельности человека постоянно возникает огромное количество сложных проблем, решить которые в одиночку достаточно трудно, а чаще всего попросту невозможно. Если речь идет о политических, социальных или экономических вопросах, от правильного решения которых зависит благополучие многих людей, то в этом случае на лицо, принимающее решение (л.п.р.), ложится серьезная ответственность за разумность такого решения. При этом обоснованный вывод можно получить при помощи специального раздела прикладной алгебры и математической логики – "Теории принятия решений", в рамках которого рассматриваются различные способы принятия решений. Выбор способа обуславливается условиями конкретной задачи. Прикладная направленность теории обширна, отметим лишь, что в настоящее время особую актуальность приобретают системы, предназначенные для поддержки процессов принятия решений, в частности, советующие и экспертные системы.

Условно можно выделить два класса объектов, с которыми приходится сталкиваться специалистам при принятии решений – "простые" и "сложные". Простые – точные математические модели, адекватные объекту исследования. Для построения моделей таких объектов имеются хорошо разработанные математические методы на основе "обычных" (в классическом понимании) множеств. Однако очень часто, может быть даже в большинстве случаев, свести нахождение оптимального решения к классическим методам не удается.

"Сложные" объекты имеют следующие отличительные особенности:

– не все цели выбора и условия, влияющие на этот выбор, могут быть выражены в виде количественных отношений;
– отсутствует, либо является сложным формализованное описание объекта;
– значительная часть информации, необходимая для математического описания объектов, существует в форме представлений и пожеланий специалистов – экспертов, имеющих опыт работы с данным объектом.

В этом случае при генерации решения необходимо применять подходы, отличные от классических, пригодные при оценке факта неясности и неопределенности. Нечеткая логика как раз и предполагает неточные, приблизительные, примерные оценки.

Предполагается, что основные понятия алгебры множеств (при классическом подходе) читателям уже знакомы, поэтому остановимся в дальнейшем подробно лишь на основах алгебры нечетких множеств.

1. Четкие и нечеткие множества

1.1. Четкие множества

Определение 1. Множество A – четкое множество, если A – часть некоторого универсального для данной прикладной задачи множества U, характеризующегося условиями:

– все элементы множества четко различимы между собой, в множестве нет повторяющихся элементов, нескольких экземпляров некоторых элементов;

– относительно каждого элемента $u \in U$ можно четко определить, принадлежит он данному множеству или нет.

Эти условия позволяют охарактеризовать четкое множество его характеристической функцией, заданной на универсальном множестве U и принимающей значения в множестве $\{0, 1\}$:

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 0, u \notin A, \\ 1, u \in A. \end{cases} \quad u \in U.$$

Отказ от первого условия приводит к более общему, чем множество, понятию комплекта, допускающего наличие нескольких экземпляров некоторых элементов. Комплект $\overline{A}$ характеризуется функцией экземплярности, заданной на универсальном множестве U и принимающей значения в множестве неотрицательных целых чисел: $\Psi_A(u) \in \{0, 1, 2, ...\}$ – число экземпляров элемента $u \in U$ в комплекте A.

Отказ от второго условия приводит к более общему, чем множество, понятию нечеткого множества, допускающего определение лишь некоторой степени принадлежности элементов такому множеству. Нечеткое множество – это модель множества с нечеткими или "размытыми границами" (переход от принадлежности к непринадлежности элементов данному множеству осуществляется постепенно).

1.2. Нечеткие множества

Нечеткое множество $\widetilde{A}$ характеризуется функцией принадлежности, заданной на универсальном множестве U и принимающей значения во множестве чисел $[0,1]$: $\mu_A(u) \in [0,1]$, $u \in U$, при этом $\mu_A(u)$ указывает на степень принадлежности элемента $u \in U$ нечеткому множеству.

Легко заметить, что четкое множество – частный случай нечеткого множества, в этом случае функция принадлежности может принимать только два возможных значения 0 или 1 и является ни чем иным, как характеристической функцией четкого множества.

Определение 2. Нечетким подмножеством $\widetilde{A}$ множества X называется совокупность пар вида $\widetilde{A} = \{x,\ \mu_A(x)\}$, где $x \in X$, а μ_A – функция принадлежности, ставящая в соответствие множеству X отрезок $[0,1]$.

X – базовое множество или базовая шкала. Значение функции принадлежности для каждого элемента x называется его степенью принадлежности элемента X нечеткому множеству $\widetilde{A}$. В множество $\widetilde{A}$ не включаются элементы для которых $\mu_A(x)=0$.

Нечеткое множество $\varnothing$ – пустое, если $\mu_{\varnothing}(x) = 0$, для каждого $x \in X$.

Нечеткое множество X – универсальное, если $\mu_X(x)=1$, для каждого $x \in X$.

Пример 1. Пусть X – множество отечественных машин.

X={"Волга", "Запорожец", "Москвич", "Жигули"}. Тогда можно определить нечеткое множество $\widetilde{A}$ хороших машин так: $\widetilde{A}$={("Волга"; 1), ("Запорожец"; 0,4), ("Москвич"; 0,6), ("Жигули"; 0,8)}.

Функция принадлежности выбирается субъективно, зависит от субъекта, его настроения, цели построения множеств и т.д.

Пример 2. Функция принадлежности четкому множеству

$B=\{x \mid 0 \le x \le 2\}$ принимает значения 1, если $0 \le x \le 2$ и значения 0 в противном случае. Ее график приведен на рис.1.

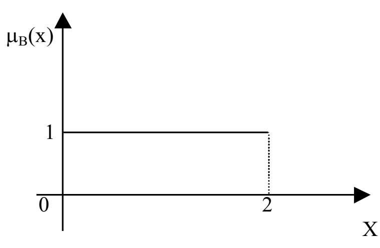


Рис. 1

График же функции принадлежности любому нечеткому множеству (за исключением пустого и универсального множеств) будет представлять собой некую кривую. Рассмотрим, например, нечеткое множество $C=\{\, x \mid$ "значения x близко к 1"$\}$. График его функции принадлежности может выглядеть так, как например на рис.2 а), б).

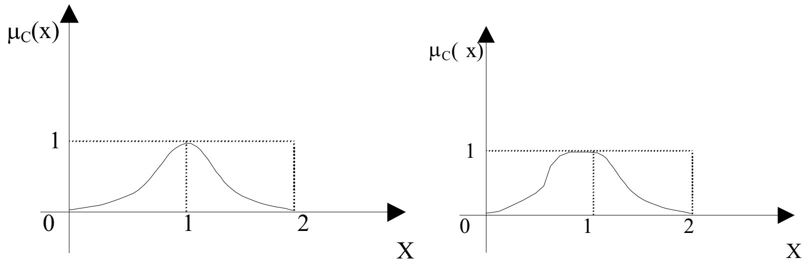


Рис. 2 а), б)

Определение 3. Носителем нечеткого множества $\widetilde{A}$ называется подмножество A множества X, содержащее те элементы из X, для которых значения функции принадлежности $\mu_A(x) > 0$. Следует заметить, что носитель нечеткого множества – это множество в обычном смысле.

Пример 3. Пусть X – множество натуральных чисел. Тогда его нечеткое подмножество $\widetilde{M}$ очень малых чисел может быть таким: $\widetilde{M} =\{(1;\, 1),\, (2;\, 0{,}8),\, (3;\, 0{,}7),\, (4;\, 0{,}6),\, (5;\, 0{,}5),\, (6;\, 0{,}3),\, (7;\, 0{,}1)\}$.

Носителем нечеткого множества $\widetilde{M}$ является множество $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Это обычное четкое подмножество множества X.

1.3. Нечеткие высказывания и операции над ними

Определение 4. Нечеткое высказывание $\widetilde{A}$ – предложение, относительно которого можно судить о степени его истинности или ложности в настоящее время. Степень истинности или ложности $d(\widetilde{A})$ принимает значения из $[0\ ;\ 1]$,

где $0,\ 1$ – предельные значения степени истинности и совпадают с поня тиями "лжи" и "истины" для четких высказываний.

Нечеткое высказывание со степенью истинности $0,5$ называется *индифферентностью*, поскольку оно истинно в той же мере, что и ложно.

Пример 4. "2 – маленькое число" – нечеткое высказывание, степень истинности которого $d(\widetilde{A}) = 0,9$.

"Петров занимается большой общественной работой" – нечеткое высказывание со степенью истинности $d(\widetilde{A}) = 0,3$.

Определение 5. Отрицанием нечеткого высказывания $\widetilde{A}$ является $\rceil\widetilde{A}$, степень истинности которого определяется выражением $d(\rceil\widetilde{A}) = 1 - d(\widetilde{A})$. Из этого определения следует, что степень ложности $\rceil\widetilde{A}$ совпадает со степенью истинности для $\widetilde{A}$.

Определение 6. Конъюнкцией нечетких высказываний $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, называется нечеткое высказывание $\widetilde{A} \& \widetilde{B}$, степень истинности которого совпадает со степенью истинности менее истинного высказывания. $d(\widetilde{A} \& \widetilde{B}) = min(d(\widetilde{A}); d(\widetilde{B}))$.

Определение 7. Дизъюнкцией нечетких высказываний $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, называется нечеткое высказывание $\widetilde{A} \vee \widetilde{B}$, степень истинности которого совпадает со степенью истинности более истинного высказывания. $d(\widetilde{A} \vee \widetilde{B}) = max(d(\widetilde{A}); d(\widetilde{B}))$.

Определение 8. Импликацией нечетких высказываний $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, называется нечеткое высказывание $\widetilde{A} \rightarrow \widetilde{B}$, степень истинности которого $d(\widetilde{A} \rightarrow \widetilde{B}) = max(1 - d(\widetilde{A}), d(\widetilde{B}))$. Истинность импликации не меньше чем степень ложности ее посылки или степень истинности ее следствия.

Пример 5. Пусть нечеткое высказывание $\widetilde{A}$ имеет степень истинности $d(\widetilde{A}) = 0,3$; нечеткое высказывание $\widetilde{B}$ – $d(\widetilde{B}) = 0,6$. Импликация этих высказываний $\widetilde{A} \rightarrow \widetilde{B}$ будет иметь степень истинности

$d(\tilde{A} \to \tilde{B})=max(0,7;\ 0,6)=0,7.$

Степень импликации тем выше, чем меньше степень истинности посылки или больше степень истинности следствия.

Определение 9. Эквивалентностью нечетких высказываний $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, называется нечеткое высказывание $\tilde{A} \leftrightarrow \tilde{B}$.

$d(\tilde{A} \leftrightarrow \tilde{B})=min(max(1-d(\tilde{A}),d(\tilde{B})),max(1-d(\tilde{B}),d(\tilde{A}))).$

Истинность эквивалентности совпадает со степенью истинности менее истинной из импликаций $\tilde{A} \to \tilde{B}$ и $\tilde{B} \to \tilde{A}$.

Если степень истинности высказываний 0 или 1, то все определения соответствуют логическим операциям над четкими высказываниями.

Определение 10. Два высказывания $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называются нечетко близкими, если степень истинности $\tilde{A} \leftrightarrow \tilde{B}$ больше или равна $0,5$. В последнем случае будем называть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ взаимно нечетко индифферентными.

Порядок выполнения операций над нечеткими высказываниями: скобки, отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность.

Пример 6. Вычислим степень истинности составного нечеткого высказывания $\tilde{D}=(\tilde{A}\,\&\urcorner\tilde{B} \vee \urcorner\tilde{A}\,\&\,\tilde{B}) \to \urcorner(\tilde{A}\,\&\,\tilde{C});$ если $\tilde{A}=0,7;$ $\tilde{B}=0,4;$ $\tilde{C}=0,9.$

$$d(\tilde{D})=max\ (1-d(\tilde{A}\,\&\urcorner\tilde{B} \vee \urcorner\tilde{A}\,\&\,\tilde{B}),\ d(\urcorner(\tilde{A}\,\&\,\tilde{C}))) =$$
$$=max(1-max(d(\tilde{A}\,\&\urcorner\tilde{B}),d(\urcorner\tilde{A}\,\&\,\tilde{B})),\ d(1-(\tilde{A}\,\&\,\tilde{C}))) =$$
$$=max\ ((1 - max(min(d(\tilde{A}),\ 1 - d(\tilde{B})),\ min\ (1 -d(\tilde{A}),d(\tilde{B})))),$$
$$1 - min\ (d(\tilde{A}),\ d(\tilde{C}))) = max((1 - max(min\ 0,7;\ 0,6),\ min\ (0,3;\ 0,4))),\ 1 - min\ (0,7;\ 0,9)) = = max\ ((1 - max(0,6;\ 0,3))),\ 0,3)= max\ (0,4;0,3)= 0,4.$$

1.4. Нечеткие логические формулы и их свойства

Определение 11. Нечеткая высказывательная переменная $\widetilde{x}_i$ – это нечеткое высказывание, степень истинности которого может принимать произвольное значение из отрезка $[0;\ 1]$.

Определение 12. Нечеткой логической формулой $\widetilde{A}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$, $n \geq 1$ называется:

а) любая нечеткая высказывательная переменная или константа из $[0;\ 1]$,

б) выражение $\widetilde{A}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$, полученное из нечетких логических формул $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ и $\widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ применением к ним любого конечного числа логических операций.

В частности, составные нечеткие высказывания также являются нечеткими логическими формулами, если рассмотреть образующие их простые нечеткие высказывания как нечеткие высказывательные переменные.

Определение 13. Степень равносильности формул $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ и $\widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ обозначается $\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2)$ и определяется

$$\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2) = \underset{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n}{\&} (\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n) \leftrightarrow \widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)).$$

Если степень равносильности нечетких логических формул $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ *и* $\widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ на всех определенных наборах степеней истинности высказывательных переменных больше или равна $0{,}5$, то такие формулы будем называть нечетко близкими на этих наборах и обозначать $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n) \approx \widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$.

Если $\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2) \leq 0{,}5$, то формулы не являются нечетко близкими: $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n) \not\approx \widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$.

Заметим, что при $\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2) = 0{,}5$ формулы $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$

и $\widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ одновременно являются и не являются нечетко близкими. Их называют взаимно индифферентными и обозначают $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n) \sim \widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$.

Равносильность четких логических формул является частным случаем нечеткой близости.

Если $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ на одних и тех же наборах степеней истинности переменных принимают одни и те же значения степени истинности, то значение степени их равносильности всегда больше или равно $0,5$, что является частным случаем нечеткой близости. То есть, нечеткие логические формулы, имеющие на одних и тех же наборах переменных одинаковые степени истинности не равносильны, а имеют некоторую степень равносильности $\geq 0,5$, но всегда ≤ 1.

Пример 7. Определить степень равносильности формул $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ *и* $\widetilde{A}_2(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, где $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \rceil\, \widetilde{x} \to \widetilde{y}$, $\widetilde{A}_2(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \widetilde{x} \,\&\, \neg\widetilde{y}$, $\widetilde{x}$ принимает значение степени истинности из множества дискретных значений $\{0,8;\ 0,6;\ 0,7\}$, *а* $\widetilde{y}$ *из* $\{0,3;\ 0,4\}$.

Решение. $\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2) = \underset{\widetilde{x},\,\widetilde{y}}{\&}(\rceil\, \widetilde{x} \to \widetilde{y}) \leftrightarrow (\widetilde{x} \,\&\, \rceil\widetilde{y}))$.

Выбирая все возможные наборы степеней истинности $\widetilde{x}$ *и* $\widetilde{y}$ запишем

$$\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2) = ((\rceil 0,8 \to 0,3) \leftrightarrow (0,8 \,\&\, \rceil\, 0,3)) \,\&\, (\rceil\, 0,8 \to 0,4) \leftrightarrow (0,8 \,\&\, \rceil\, 0,4)) \,\&\, (\rceil 0,6 \to 0,3) \leftrightarrow (0,6 \,\&\, \rceil\, 0,3)) \,\&\, (\rceil\, 0,6 \to 0,4) \leftrightarrow (0,6 \,\&\, \rceil\, 0,4)) \,\&\, (\rceil 0,7 \to 0,3) \leftrightarrow (0,7 \,\&\, \rceil\, 0,3)) \,\&\, (\rceil\, 0,7 \to 0,4) \leftrightarrow (0,7 \,\&\, \rceil\, 0,4)) \,\& = (0,8 \leftrightarrow 0,7) \,\&\, (0,8 \leftrightarrow 0,6) \,\&\, (0,6 \leftrightarrow 0,6) \,\&\, \&(0,6 \leftrightarrow 0,6) \,\&\, (0,7 \leftrightarrow 0,7) \,\&\, (0,7 \leftrightarrow 0,6) = 0,7 \,\&\, 0,6 \,\&\, 0,6 \,\&\, 0,6 \,\&\, 0,7 \,\&\, 0,6 = 0,6$$

Откуда следует, формулы $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$ нечетко близки при заданных наборах степеней истинности.

Если сделать такую же проверку, полагая, что $\widetilde{x}$ принимает значение из набора $\{0,2;\ 0,4\}$, а $\widetilde{y}$ из $\{0,6;\ 0,7;\ 0,8\}$, то $\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2) = 0,2$. И в этом случае формулы не являются нечетко близкими.

Определение 14. Если при всех определенных значениях степени истинности нечетких переменных $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, ..., \tilde{x}_n$, значение степени истинности нечеткой логической формулы $\tilde{A}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, ..., \tilde{x}_n)$ больше или равно $0,5$, то формула является нечетко истинной на данных наборах переменных и обозначается через $\tilde{И}$. Если значение степени истинности меньше или равно $0,5$, то такую формулу будем называть нечетко ложной на данных наборах переменных и обозначим $\tilde{Л}$.

Пусть $\tilde{И}_1$, $\tilde{И}_2$, $\tilde{Л}_1$, $\tilde{Л}_2$ – некоторые нечетко истинные и нечетко ложные формулы на одних и тех же наборах переменных, тогда справедливы следующие соотношения.

$$\tilde{И}_1 \vee \tilde{И}_2 \approx \tilde{И}_1 \approx \tilde{И}_2 \approx \tilde{И}_1 \;\&\; \tilde{И}_2$$

$$\tilde{Л}_1 \vee \tilde{Л}_2 \approx \tilde{Л}_1 \approx \tilde{Л}_2 \approx \tilde{Л}_1 \;\&\; \tilde{Л}_2$$

$$\tilde{И}_1 \;\&\; \tilde{Л}_1 \approx \tilde{Л}_1$$

$$\tilde{И}_1 \vee \tilde{Л}_1 \approx \tilde{И}_1$$

Если $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ – произвольные нечеткие логические формулы, то справедливы соотношения:

$$\tilde{A}_1 \vee \tilde{И}_1 \approx \tilde{A}_2 \vee \tilde{И}_2$$

$$\tilde{A}_1 \;\&\; \tilde{Л}_1 \approx \tilde{A}_2 \;\&\; \tilde{Л}_2,$$

где $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$, $\tilde{И}_1$, $\tilde{И}_2$, $\tilde{Л}_1$, $\tilde{Л}_2$ определены на одних и тех же наборах переменных.

Пример 8. Приведем простейший пример нечетко истинных и нечетко ложных формул.

$$\tilde{Л} = \tilde{x} \;\& \neg\tilde{x} \cdot \; \tilde{И} = \tilde{x} \vee \neg\tilde{x} \cdot$$

Это следует из определения операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции , т.к. $\tilde{x} \;\& \neg\tilde{x} \le 0,5$, $\tilde{x} \vee \neg\tilde{x} \ge 0,5$.

Тождества позволяют определить класс нечетко близких формул, не имеющих аналогов в нечеткой логике.

Утверждение 1.

Если нечеткая логическая формула $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ представлена в виде $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n) = f_1 \,\&\, (\widetilde{x}_i \,\&\, \neg\widetilde{x}_i)$, а $\widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n) = f_2 \,\&\, (\widetilde{x}_j \,\&\, \neg\widetilde{x}_j)$, где f_1 и f_2 – некоторые нечеткие формулы от переменных $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n$, а $\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_j$ – нечеткие переменные из набора $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n$, то можно утверждать, что $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n) \approx \widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$.

Соотношения, справедливые для любых наборов значений истинности нечетких переменных.

Пусть $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}$ – нечеткие логические формулы.

(1) $\neg(\neg\widetilde{x}) \approx \widetilde{x}$

(2) $\widetilde{x} \,\&\, \widetilde{x} \approx \widetilde{x}$

$\widetilde{x} \vee \widetilde{x} \approx \widetilde{x}$

(3) $\widetilde{x} \,\&\, \widetilde{y} \approx \widetilde{y} \,\&\, \widetilde{x}$

$\widetilde{x} \vee \widetilde{y} \approx \widetilde{y} \vee \widetilde{x}$

(4) $\widetilde{x} \,\&\, (\widetilde{y} \,\&\, \widetilde{z}) \approx (\widetilde{x} \,\&\, \widetilde{y}) \,\&\, \widetilde{z} \approx \widetilde{x} \,\&\, \widetilde{y} \,\&\, \widetilde{z}$

$\widetilde{x} \vee (\widetilde{y} \vee \widetilde{z}) \approx (\widetilde{x} \vee \widetilde{y}) \vee \widetilde{z} \approx \widetilde{x} \vee \widetilde{y} \vee \widetilde{z}$

(5) $\widetilde{x} \,\&\, (\widetilde{y} \vee \widetilde{z}) \approx (\widetilde{x} \,\&\, \widetilde{y}) \vee (\widetilde{x} \,\&\, \widetilde{z})$

$\widetilde{x} \vee (\widetilde{y} \,\&\, \widetilde{z}) \approx (\widetilde{x} \vee \widetilde{y}) \,\&\, (\widetilde{x} \vee \widetilde{z})$

(6) $\neg(\widetilde{x} \,\&\, \widetilde{y}) \approx \neg\widetilde{x} \vee \neg\widetilde{y}$

$\neg(\widetilde{x} \vee \widetilde{y}) \approx \neg\widetilde{x} \,\&\, \neg\widetilde{y}$

(7) $\widetilde{x} \,\&\, (\widetilde{x} \vee \widetilde{y}) \approx \widetilde{x}$, $\widetilde{x} \vee (\widetilde{x} \,\&\, \widetilde{y}) \approx \widetilde{x}$

(8) $(\tilde{x} \vee \tilde{y}) \vee (\tilde{x} \,\&\, \tilde{y}) \approx \tilde{x} \vee \tilde{y}$

(9) $(\tilde{x} \vee \tilde{y}) \,\&\, (\tilde{x} \,\&\, \tilde{y}) \approx \tilde{x} \,\&\, \tilde{y}$

(10) $\tilde{x} \,\&\, \neg\tilde{x} \approx \tilde{y} \,\&\, \neg\tilde{y}$

(11) $\tilde{x} \vee \neg\tilde{x} \vee \tilde{y} \approx \tilde{y} \vee \neg\tilde{y} \vee \tilde{x}$

(12) $(\tilde{x} \,\&\, \neg\tilde{x}) \,\&\, (\tilde{y} \vee \neg\tilde{y}) \approx \tilde{x} \,\&\, \neg\tilde{x}$

$(\tilde{x} \vee \neg\tilde{x}) \vee (\tilde{y} \,\&\, \neg\tilde{y}) \approx \tilde{x} \vee \neg\tilde{x}$

(13) $\tilde{x} \to \tilde{y} \approx \neg\tilde{y} \to \neg\tilde{x}$

(14) $\neg\tilde{x} \to \tilde{y} \approx \neg\tilde{y} \to \tilde{x} \approx \tilde{x} \vee \tilde{y}$

(15) $\tilde{x} \to (\tilde{y} \vee \neg\tilde{y}) \approx (\tilde{x} \,\&\, \neg\tilde{x}) \to \tilde{y}$

(16) $(\tilde{x} \,\&\, \neg\tilde{x}) \to (\tilde{y} \vee \tilde{z}) \approx (\tilde{y} \,\&\, \neg\tilde{y}) \to \tilde{x} \vee \tilde{z}$

Кроме того, пусть $0, c, 1$ – константы и $0<c<1$, тогда

$$\tilde{x} \,\&\, 0 \approx 0, \quad \tilde{x} \,\&\, 1 \approx \tilde{x}$$

$$\tilde{x} \vee 0 \approx \tilde{x}, \quad \tilde{x} \vee 1 \approx 1$$

$$\tilde{x} \,\&\, c \approx \begin{cases} \tilde{x}, \text{ если } \tilde{x} \le c, \\ c, \text{ если } \tilde{x} \ge c. \end{cases}$$

$$\tilde{x} \vee c \approx \begin{cases} c, \text{ если } \tilde{x} \le c, \\ \tilde{x}, \text{ если } \tilde{x} \ge c. \end{cases}$$

Для доказательства каждого из выражений необходимо показать, что степень равносильности $\mu(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$ образующих его формул $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ больше или равно $0,5$.

Это возможно тогда, когда формулы $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ принимают одни и те же значения степени истинности на одинаковых наборах переменных, либо имеют степень истинности одновременно меньше или равно $0,5$ или больше или равно $0,5$ на одинаковых наборах переменных.

Докажем формулу *(6)* $\neg(\tilde{x} \,\&\, \tilde{y}) \approx \neg\tilde{x} \vee \neg\tilde{y}$; обозначим $\tilde{A}_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \neg(\tilde{x} \,\&\, \tilde{y})$, $\tilde{A}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \neg\tilde{x} \vee \neg\tilde{y}$.

$$d(\widetilde{A}_1(\widetilde{x},\widetilde{y})) = 1 - \min(\widetilde{x},\widetilde{y}),$$

$d(\widetilde{A}_2(\widetilde{x},\widetilde{y})) = \max(1-\widetilde{x}, 1-\widetilde{y})$. Если $\widetilde{x} < \widetilde{y}$, тогда $d(\widetilde{A}_1 \ (\widetilde{x},\widetilde{y}))=1-\widetilde{x}$ и $d(\widetilde{A}_2 \ (\widetilde{x},\widetilde{y}))=1-\widetilde{x}$, т.е. при всех $\widetilde{x}$ степени истинности формул $\widetilde{A}_1 \ (\widetilde{x},\widetilde{y})$ и $\widetilde{A}_2 \ (\widetilde{x},\widetilde{y})$ совпадают, откуда следует $\mu(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2) \geq 0{,}5$.

Если $\widetilde{x} > \widetilde{y}$, то $d(\widetilde{A}_1 \ (\widetilde{x},\widetilde{y}))=1-\widetilde{y}$, $d(\widetilde{A}_2 \ (\widetilde{x},\widetilde{y}))=1-\widetilde{y}$, откуда следует $\mu(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2) \geq 0{,}5$.

Если $\widetilde{x} = \widetilde{y}$, то $d(\widetilde{A}_1 \ (\widetilde{x},\widetilde{y}))=1-\widetilde{x}$, $d(\widetilde{A}_2 \ (\widetilde{x},\widetilde{y}))=1-\widetilde{y}$, откуда следует $\mu(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2) \geq 0{,}5$.

1.5. Нечеткие предикаты и кванторы

Определение 15. Нечеткие логические формулы, которые определены на каком-либо множестве X и принимают свои значения из замкнутого интервала $[0,\ 1]$ называют нечетким предикатом.

Например, μ_A – функция принадлежности является одноместным нечетким предикатом.

Пример 9. $X=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 10\}$, тогда нечеткий предикат "быть небольшим числом" принимает следующие значения: $\widetilde{A}(1)=1$, $\widetilde{A}(2)=0{,}9$, $\widetilde{A}(3)=0{,}7$, $\widetilde{A}(4)=0{,}5$, $\widetilde{A}(5)=0{,}1$, $\widetilde{A}(6)=0$, $\widetilde{A}(7)=0$, $\widetilde{A}(8)=0$, $\widetilde{A}(9)=0$, $\widetilde{A}(10)=0$ и фактически задает нечеткое множество $\widetilde{A}=\{(1;\ 1), (2;\ 0{,}9), (3;\ 0{,}7), (4;\ 0{,}3), (5;\ 0{,}1)\}$ в множестве X.

Пусть областью определения нечеткого предиката $\widetilde{A}$ является множество $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n\}$, тогда для каждого $x \in X$ может быть вычислено значение $\mu_A(x)$ предиката $\widetilde{A}(x)$.

Определение 16. Величина $\mu(\widetilde{A}) = \mu_A(x_1) \& \mu_A(x_2) \& \mu_A(x_3) \& \ldots \& \mu_A(x_n) = \underset{x \in X}{\&} \mu_A(x)$ называется степенью общности свойств $\widetilde{A}(x)$ для элементов множества X.

Если $\mu(\widetilde{A}) \geq 0{,}5$, то на логическую формулу $\widetilde{A}(x)$ может быть навешан квантор нечеткой общности $\widetilde{\forall}$, который читается "для всех" или "для любого".

Определение 17. Величина $\nu(\widetilde{A}) = \mu_A(x_1) \vee \mu_A(x_2) \vee \mu_A(x_3) \vee \mu_A(x_n) = \underset{x \in X}{\vee} \mu_A(x)$ называется степенью существования свойства $\widetilde{A}(x)$ для элементов множества X.

Если $\nu(\widetilde{A}) \geq 0{,}5$, то на логическую формулу $\widetilde{A}(x)$ может быть навешан квантор нечеткого существования $\widetilde{\exists}$, который читается "существует такой" или "имеется такой".

Пусть $\widetilde{A}(x)$ – нечеткая логическая формула от одной переменной, принимающей значения из X. Выражение $(\widetilde{\forall}\, x \in X)\ \widetilde{A}(x)$ является нечетко истинной формулой и читается "для любого $x \in X$ степень истинности $\widetilde{A}(x)$ больше или равно $0{,}5$".

2. Операции над нечеткими множествами

2.1. Нечеткое включение и нечеткое равенство множеств

Так же как над четкими множествами определяются отношения включения, равенства, операции объединения, пересечения, дополнения, и т.д., определяются они и над нечеткими множествами, только делается это при помощи функции принадлежности.

Определение 1. Пусть заданы нечеткие подмножества $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ множества X. Степень включения $\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ нечеткого множества $\widetilde{A}$ в нечеткое множество $\widetilde{B}$ находится по формуле $\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \underset{x\in X}{\&} (\mu_A(x) \to \mu_B(x))$, где $\mu_A(x), \mu_B(x)$ понимаются как нечеткие высказывательные переменные, $\to$ – импликация, $\&$ – операция конъюнкции, которая берется по всем $x \in X$.

Если $\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \geq 0,5$, то $\widetilde{A}$ нечетко включается в множество $\widetilde{B}$ и обозначается $\widetilde{A} \underset{\sim}{\subseteq} \widetilde{B}$. Если $\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \leq 0,5$, то $\widetilde{A}$ нечетко не включается в множество $\widetilde{B}$ и обозначается $\widetilde{A} \underset{\sim}{\not\subseteq} \widetilde{B}$. Это понятие является обобщением понятия включения для четких множеств. Действительно, пусть A и B – четкие множества и $A \subseteq B$, отсюда следует $\nu(A,B)=1$. Если же $A \not\subset B$, то $\nu(A,B)=0$.

Пример 1. $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. $\widetilde{A}=\{(x_2;0,3), (x_3;0,6), (x_5;0,4)\}$, $\widetilde{B}=\{(x_1;0,8), (x_2;0,5), (x_3;0,7), (x_5;0,6)\}$, тогда

$$\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = (0 \to 0,8)\&(0,3 \to 0,5)\&(0,6 \to 0,7)\&(0,4 \to 0,6) =$$
$$= 1 \& 0,7 \& 0,7 \& 1 \& 0,6 = 0,6.$$

Аналогично можно вычислить $\nu(\widetilde{B}, \widetilde{A})=0,2$, откуда следует $\widetilde{A} \underset{\sim}{\subseteq} \widetilde{B}$, но $\widetilde{B} \underset{\sim}{\not\subseteq} \widetilde{A}$.

Определение 2. Множество $\widetilde{A}$ включается во множество $\widetilde{B}$ — $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$ если $\forall x \in X, \mu_A(x) \le \mu_B(x)$.

Справедливо следующее утверждение: если нечеткое множество $\widetilde{A}$ включается в нечеткое множество $\widetilde{B}$ (см. определение 2), то выполняется и нечеткое включение $\widetilde{A} \subsetneqq \widetilde{B}$.

Действительно, пусть выполняется $\forall x \in X, \mu_A(x) \le \mu_B(x)$, докажем, что $\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \ge 0,5$. Если $\mu_A(x) \le \mu_B(x) \le 0,5$, то

$$\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = (\mu_A(x_1) \to \mu_B(x_1)) \& (\mu_A(x_2) \to \mu_B(x_2)) \& \ldots (\mu_A(x_n) \to \mu_B(x_n)) =$$
$$= (max(1-\mu_A(x_1), \mu_B(x_1))) \& (max(1-\mu_A(x_2), \mu_B(x_2))) \& \ldots$$
$$\& (max(1-\mu_A(x_n), \mu_B(x_n))) = (1-\mu_A(x_1)) \& (1-\mu_A(x_2)) \& \ldots$$
$\& (1-\mu_A(x_n))$. Из определения операции конъюнкции следует, что результат будет минимальным из всех $(1-\mu_A(x_i)), i=1..n$. А поскольку для $\forall x \in X\ \mu_A(x) \le 0,5$, *то* $\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \ge 0,5$.

Если $0,5 < \mu_A(x) \le \mu_B(x)$, то

$$\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = (\mu_A(x_1) \to \mu_B(x_1)) \& (\mu_A(x_2) \to \mu_B(x_2)) \& \ldots$$
$$\& (\mu_A(x_n) \to \mu_B(x_n)) = (max(1-\mu_A(x_1), \mu_B(x_1))) \&$$
$$\& (max(1-\mu_A(x_2), \mu_B(x_2))) \& \ldots \& (max(1-\mu_A(x_n), \mu_B(x_n))) =$$
$$= (\mu_B(x_1)) \& (\mu_B(x_2)) \& \ldots \& (\mu_B(x_n)).$$

Так как для $\forall x \in X\ \mu_B(x) > 0,5$, *то* $\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) > 0,5$.

То есть, для любых $\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \ge 0,5$ для любых значений функций принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$, $\forall x \in X$.

Если же выполняется $\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \ge 0,5$, то из этого не следует, что $\forall x \in X, \mu_A(x) \le \mu_B(x)$. Действительно,

$$\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = (\mu_A(x_1) \to \mu_B(x_1)) \& (\mu_A(x_2) \to \mu_B(x_2)) \& \ldots (\mu_A(x_n) \to \mu_B(x_n)) =$$
$$= (max(1-\mu_A(x_1), \mu_B(x_1))) \& (max(1-\mu_A(x_2), \mu_B(x_2))) \& \ldots$$
$\& (max(1-\mu_A(x_n), \mu_B(x_n)))$, так как $\nu(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \ge 0,5$, то по определению

операции конъюнкции минимальное, а значит и все остальные значения выражений $max(1\text{-}\mu_A(x_i),\ \mu_B(x_i))\geq 0{,}5$. Однако заметим, если, например $\mu_A(x_i)=0{,}3$, а $\mu_B(x_i)=0{,}2$, то $max(1\text{-}\mu_A(x_i),\ \mu_B(x_i))\geq 0{,}5$, но $\mu_A(x_i)\geq\mu_B(x_i)$. То есть, включение множества $\widetilde{A}$ во множество $\widetilde{B}$ не гарантирует нечеткого включения, а является лишь достаточным условием нечеткого включения.

Определение 3. Степень равенства двух нечетких подмножеств $\widetilde{A},\ \widetilde{B}$

множества X определяется как $\mu(\widetilde{A},\ \widetilde{B})$, где

$$\mu(\widetilde{A},\ \widetilde{B})=\underset{x\in X}{\&}(\mu_A(x)\leftrightarrow\mu_B(x)).$$

Если $\mu(\widetilde{A},\ \widetilde{B})\geq 0{,}5$, то множества нечетко равны $\widetilde{A}\approx\widetilde{B}$. Если $\mu(\widetilde{A},\ \widetilde{B})\leq 0{,}5$, то множества нечетко не равны $\widetilde{A}\not\approx\widetilde{B}$. Если $\mu(\widetilde{A},\ \widetilde{B})=0{,}5$, то множества взаимно индифферентны $\widetilde{A}\sim\widetilde{B}$.

Понятия нечеткого равенства и неравенства, ндифферентности являются обобщением понятий равенства и неравенства для четких множеств. Действительно, пусть A и B – четкие множества, тогда в случае $A=B$, $\mu(A,B)=1$, если же $A\neq B$ и $\mu(A,B)=0$.

Пример 2. $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_5\}$,

$\widetilde{A}=\{(x_2;\ 0{,}8),\ (x_3;\ 0{,}6),\ (x_5;\ 0{,}1)\}$,

$\widetilde{B}=\{(x_1;\ 0{,}3),\ (x_2;\ 0{,}6),\ (x_3;\ 0{,}7),\ (x_4;\ 0{,}2),\ (x_5;\ 0{,}3)\}$.

$\mu(\widetilde{A},\ \widetilde{B})=(0\leftrightarrow 0{,}3)\&(0{,}8\leftrightarrow 0{,}6)\&(0{,}6\leftrightarrow 0{,}7)\&(0\leftrightarrow 0{,}2)\&(0{,}1\leftrightarrow 0{,}3)=$

$=0{,}7\&\ 0{,}6\&\ 0{,}6\&\ 0{,}8\&\ 0{,}7=0{,}6$, откуда следует $\widetilde{A}\approx\widetilde{B}$.

Преобразуем степень равенства $\mu(\widetilde{A},\ \widetilde{B})=\underset{x\in X}{\&}(\mu_A(x)\leftrightarrow\mu_B x))=$

$=\underset{x\in X}{\&}((\mu_A(x)\rightarrow\mu_B(x))\&(\mu_B(x)\rightarrow\mu_A(x)))$, ввиду коммутативности конъюнкции $\mu(\widetilde{A},\ \widetilde{B})=(\underset{x\in X}{\&}(\mu_A(x)\rightarrow\mu_B(x)))\&$

$(\underset{x\in X}{\&}(\mu_B(x)\rightarrow\mu_A(x)))$, отсюда следует

$\mu(\tilde{A},\tilde{B})=\nu(\tilde{A},\tilde{B})\&\nu(\tilde{B},\tilde{A})$, т.е. степень равенства нечетких множеств равна минимальной из степеней их взаимного включения. Если $\mu(\tilde{A},\tilde{B})\geq 0,5$, т.е. множества $\tilde{A},\tilde{B}$ нечетко равны, то

$\nu(\tilde{A},\tilde{B})\geq 0,5$ и $\nu(\tilde{B},\tilde{A})\geq 0,5$, $\Rightarrow$ $\tilde{A} \subsetneqq \tilde{B}$ и $\tilde{B} \subsetneqq \tilde{A}$. Отсюда следует метод доказательства нечеткого равенства нечетких множеств, основанный на доказательстве взаимного нечеткого включения.

Определение 4. Нечеткое множество $\tilde{A}$ равно нечеткому множеству $\tilde{B}$

$$\tilde{A}=\tilde{B}\text{, если } \forall x\in X, \mu_B(x)=\mu_A(x).$$

Нетрудно заметить, если выполняется равенство множеств $\tilde{A}=\tilde{B}$, то эти множества являются и нечетко равными $\tilde{A}\approx\tilde{B}$. Действительно,

если $\mu_B(x)=\mu_A(x)\ \forall x\in X$, то $\mu(\tilde{A},\tilde{B})=\underset{x\in X}{\&}(\mu_A(x)\leftrightarrow\mu_B(x))=$

$=\nu(\tilde{A},\tilde{B})\&\nu(\tilde{B},\tilde{A})\geq 0,5$.

2.2. Теоретико-множественные операции

Пусть заданы нечеткие подмножества $\tilde{A},\tilde{B}$ множества X.

$\tilde{A}=\{<x,\mu_A(x)>\}$, $\tilde{B}=\{<x,\mu_B(x)>\}$, $x\in X$.

Определение 5. Объединением нечетких множеств $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ является нечеткое множество $\tilde{A}\cup\tilde{B}=\{x,\mu_{A\cup B}(x)\}, x\in X$, функция принадлежности элементов к которому определяется как $\mu_{A\cup B}(x)=max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}=$ $=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)$. (см. рис. 3)

Т.е. $\tilde{A}$ И $\tilde{B}$ - это нечеткое множество, такое, что $\tilde{A}\subsetneqq\tilde{A}\cup\tilde{B}$ и $\tilde{B}\subsetneqq\tilde{A}\cup\tilde{B}$.

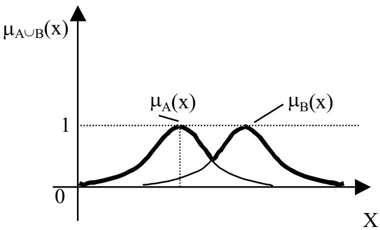


Рис. 3

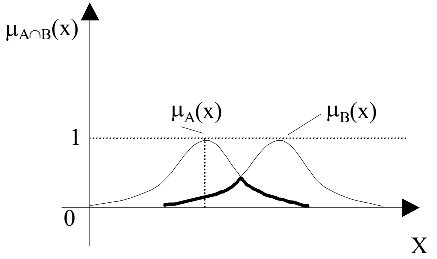


Рис. 4

Определение 6. Пересечением двух нечетких множеств $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ называется нечеткое множество $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{x, \mu_{A \cap B}(x)\}$, $x \in X$, функция принадлежности элементов к которому определяется как $\mu_{A \cap B}(x) = min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \& \mu_B(x)$. (см. рис.4)

То есть $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ – это нечеткое множество, такое, что $\tilde{A} \cap \tilde{B} \underset{\sim}{\subseteq} \tilde{A}$ и $\tilde{A} \cap \tilde{B} \underset{\sim}{\subseteq} \tilde{B}$.

Определение 7. Дополнением нечеткого множества $\tilde{A}$ называется нечеткое множество $\rceil\tilde{A}$, $x \in X$, такое, что $\mu_{\rceil A}(x) = 1 - \mu_A(x), x \in X$.

Пример 3. Рассмотрим нечеткое множество $\tilde{B}$, чисел, гораздо больших нуля. Дополнением к этому множеству будет являться множество $\tilde{A}$, чисел, гораздо меньших нуля.

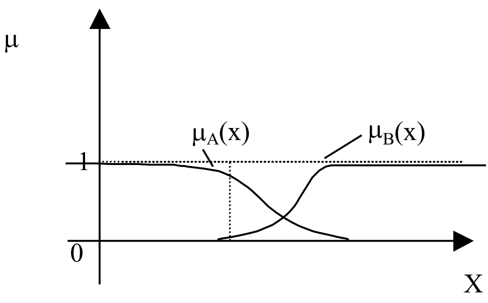


Рис. 5

Определение 8. Разностью нечетких множеств называется множество $\widetilde{A} \setminus \widetilde{B} = \{x, \mu_{A \setminus B}(x)\}, x \in X$, функция принадлежности элементов к которому определяется как
$\mu_{A \setminus B}(x) = = \mu_A \,\&\, \rceil \mu_B(x)$. (см. рис.5)

Определение 9. Симметрической разностью $\widetilde{A} \ominus \widetilde{B}$ называется множество $\widetilde{A} \ominus \widetilde{B} = \{<x; \mu_{A \ominus B}(x)>\}$,
где $\mu_{A \ominus B}(x) = \mu_{A \setminus B}(x) \vee \mu_{B \setminus A}(x)$.

Пример 4. $\widetilde{A} = \{(x_1; 0{,}3), (x_3; 0{,}8), (x_6; 0{,}4)\}$,

$\widetilde{B} = \{(x_1; 0{,}9), (x_2; 0{,}2), (x_3; 0{,}4), (x_4; 0{,}5)\}$.

$\widetilde{A} \vee \widetilde{B} = \{(x_1; 0{,}9), (x_2; 0{,}2), (x_3; 0{,}4), (x_4; 0{,}5), (x_6; 0{,}4),\}$.

$\widetilde{A} \wedge \widetilde{B} = \{(x_1; 0{,}3), (x_3; 0{,}4)\}$.

$\rceil \widetilde{A} = \{(x_1; 0{,}7), (x_2; 1), (x_3; 0{,}2), (x_4; 1), (x_5; 1), (x_6; 0{,}6), (x_7; 1)\}$.

$\widetilde{A} \setminus \widetilde{B} = \{(x_1; 0{,}1), (x_3; 0{,}6), (x_6; 0{,}4)\}$.

$\widetilde{A} \ominus \widetilde{B} = \{(x_1; 0{,}7), (x_2; 0{,}2), (x_3; 0{,}2), (x_4; 0{,}5), (x_6; 0{,}6)\}$.

Определение 10. Выпуклой комбинацией множеств $A_1, A_2, \dots A_n$ называется нечеткое множество A с функцией принадлежности $\mu_A(x) = \sum \lambda_i \mu_i(x)$, где $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, \dots. n$, и $\sum \lambda_i = 1$.

Определение 11. Множеством уровня α нечеткого множества $\widetilde{A}$ в X, называется множество в обычном смысле, составленное из элементов $x \in X$, степени принадлежности которых нечеткому множеству A больше или равны α.
$A_\alpha = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\}$.

2.3. Основные свойства нечетких множеств

1. $\rceil(\rceil \widetilde{A}) \approx \widetilde{A}$ инвалюция

2. $\widetilde{A} \vee \widetilde{A} \approx \widetilde{A}$ идемпотентность

$\widetilde{A} \wedge \widetilde{A} \approx \widetilde{A}$

3. $\widetilde{A} \vee \widetilde{B} \approx \widetilde{B} \vee \widetilde{A}$ коммутативность

$\widetilde{A} \wedge \widetilde{B} \approx \widetilde{B} \wedge \widetilde{A}$

4. $\widetilde{A} \vee (\widetilde{B} \vee \widetilde{C}) \approx (\widetilde{A} \vee \widetilde{B}) \vee \widetilde{C} \approx \widetilde{A} \vee \widetilde{B} \vee \widetilde{C}$ ассоциативность

$\widetilde{A} \wedge (\widetilde{B} \wedge \widetilde{C}) \approx (\widetilde{A} \wedge \widetilde{B}) \wedge \widetilde{C} \approx \widetilde{A} \wedge \widetilde{B} \wedge \widetilde{C}$

5. $\widetilde{A} \vee (\widetilde{B} \wedge \widetilde{C}) \approx (\widetilde{A} \vee \widetilde{B}) \wedge (\widetilde{A} \vee \widetilde{C})$ дистрибутивность

$\widetilde{A} \wedge (\widetilde{B} \vee \widetilde{C}) \approx (\widetilde{A} \wedge \widetilde{B}) \vee (\widetilde{A} \wedge \widetilde{C})$

6. $\neg(\widetilde{A} \vee \widetilde{B}) \approx \neg\widetilde{A} \wedge \neg\widetilde{B}$ законы де Моргана

$\neg(\widetilde{A} \wedge \widetilde{B}) \approx \neg\widetilde{A} \vee \neg\widetilde{B}$

7. $\widetilde{A} \vee \neg\widetilde{A} \approx \widetilde{B} \vee \neg\widetilde{B}$

$\widetilde{A} \wedge \neg\widetilde{A} \approx \widetilde{B} \wedge \neg\widetilde{B}$

8. $\widetilde{A} \vee \neg\widetilde{A} \vee \widetilde{B} \approx \widetilde{B} \vee \neg\widetilde{B} \vee \widetilde{A}$

$\widetilde{A} \wedge \neg\widetilde{A} \wedge \widetilde{B} \approx \widetilde{B} \wedge \neg\widetilde{B} \wedge \widetilde{A}$

9. $(\widetilde{A} \vee \neg\widetilde{A}) \vee (\widetilde{B} \wedge \neg\widetilde{B}) \approx \widetilde{A} \vee \neg\widetilde{A}$

$(\widetilde{A} \wedge \neg\widetilde{A}) \wedge (\widetilde{B} \vee \neg\widetilde{B}) \approx \widetilde{A} \wedge \neg\widetilde{A}$

10. $\widetilde{A} \setminus \widetilde{B} \approx \widetilde{A} \wedge \neg\widetilde{B}$

11. $\widetilde{A} \ominus \widetilde{B} \approx \widetilde{B} \ominus \widetilde{A}$

12. $\widetilde{A} \ominus (\widetilde{B} \ominus \widetilde{C}) \approx (\widetilde{A} \ominus \widetilde{B}) \ominus \widetilde{C} \approx \widetilde{A} \ominus \widetilde{B} \ominus \widetilde{C}$

13. $\widetilde{A} \ominus \widetilde{B} \approx (\widetilde{A} \setminus \widetilde{B}) \vee (\widetilde{B} \setminus \widetilde{A})$

14. $(\widetilde{A} \underset{\sim}{\subset} \widetilde{B}) \approx (\neg\widetilde{B} \underset{\sim}{\subset} \neg\widetilde{A})$

15. $(\neg\widetilde{A} \underset{\sim}{\subset} \widetilde{B}) \approx (\neg\widetilde{B} \underset{\sim}{\subset} \widetilde{A})$

16. $(\widetilde{A} \underset{\sim}{\subset} (\widetilde{B} \vee \neg\widetilde{B})) \approx ((\widetilde{A} \wedge \neg\widetilde{A}) \underset{\sim}{\subset} \widetilde{B})$

17. $((\widetilde{A} \wedge \neg\widetilde{A}) \underset{\sim}{\subset} (\widetilde{B} \vee \widetilde{C})) \approx ((\widetilde{B} \wedge \neg\widetilde{B}) \underset{\sim}{\subset} (\widetilde{A} \vee \widetilde{C}))$

18. $\widetilde{A} \vee \varnothing \approx \widetilde{A}$ $\quad \widetilde{A} \wedge \varnothing \approx \varnothing$

19. $\widetilde{A} \vee X \approx X$ $\quad \widetilde{A} \wedge X \approx \widetilde{A}$

Перечисленные выше основные свойства нечетких множеств еще не являются системой аксиом. Строгая же система аксиом, адекватная, в частности, алгебре нечетких множеств была сформулирована за 7 лет до их возникновения. Сооответствующая алгебраическая структура определяется на множестве X с двумя системами операций: $<X,\ +,\ *, \rceil,\ 0,1>$ или $<X,\ \vee,\ \wedge, \rceil,\ 0,1>$, где $x \wedge y=(x+\rceil y)*y,\ \ x\vee y=(x*\rceil y)+y$ (символы операций выбраны для простоты формулировок, их не следует воспринимать буквально, как соответствующие арифметические или логические операции).

Система аксиом

4. Задачи принятия решения на базе нечеткой логики

В [3] выделяется несколько типов задач принятия решений на базе нечеткой логики.

1.	$x + y = y + x$	1'.	$x * y = y * x$
2.	$x + (y + z) = (x + y) + z$	2'.	$x * (y * z) = (x * y) * z$
3.	$x+ \rceil x = 1$	3'.	$x * \rceil x = 1$
4.	$x + 1 = 1$	4'.	$x * 0 = 0$
5.	$x + 0 = x$	5'.	$x * 1 = x$
6.	$(x + y) = \rceil x * \rceil y$	6'.	$(x * y) = \rceil x + \rceil y$
7.	$x = \rceil(\rceil x)$		
8.	$0 = 1$		
9.	$x \vee y = y \vee x$	9'.	$x \wedge y = y \wedge x$
10.	$x \vee (y \vee z)= (x \vee y) \vee z$	10'.	$x \wedge (y \wedge z)= (x \wedge y) \wedge z$
11.	$x + (y \wedge z) = (x + y)\wedge(x + z)$	11'.	$x * (y \vee z)=(x*y)\vee(x * z)$

Эта система аксиом полна. Подалгебра ВХ тех элементов из X, для которых $x + x = x$ (или, что равносильно $x*x=x$), является булевой алгеброй, в которой $x + y = x \vee y,\ x*y = x \wedge y$.

Связь с нечеткими множествами становится ясной после рассмотрения класса примеров таких алгебр, образованного множествами S действительных чисел между 0 и 1, удовлетворяющими условиям (двойные

++, -- обозначают обычные арифметические операции):
1. $0 \in S$ и $1 \in S$;
2. если $x, y \in S$, то $min(1, x{+}{+}y) \in S$;
3. если $x, y \in S$, то $max(0, x{+}{+}y - 1) \in S$;
4. если $x \in S$, то $1 - x \in S$.

Операции в S определяются следующим образом:

$$x + y = min(1, x{+}{+}y), x{*}y = max(0, x{+}{+}y - 1), \rceil x = 1 - x,$$
$$x \vee y = max(x,y), x \wedge y = min(x,y).$$

Без труда проверяется, что так определенная структура удовлетворяет приведенным аксиомам, но не аксиомам булевой алгебры. Сформулированным условиям 1 – 4 удовлетворяют различные конкретные множества, например, $S=\{0,1\}$; $S=[0,1]$; $S=$\{все рациональные числа между 0 и 1\}; $S(m)=$\{все рациональные числа вида n/m для некоторого фиксированного натурального m и целых $0 \leq n \leq m$\}, с операциями

Нечеткое подмножество A универсального множества U может быть определено функцией принадлежности $\mu(A,x) \in X$, где X удовлетворяет требуемым аксиомам (традиционно $X=S=[0,1]$); $\mu(U,u) = 1$. Операции над нечеткими множествами определяются в терминах их функций принадлежности и сводятся (“поточечно”) к операциям над значениям последних, то есть к операциям в X.

Операции $\rceil$, +, * в случае $X=S=[0,1]$ и являются известными в теории нечетких множеств дополнением, граничными суммой и произведением, менее популярными, чем $\vee$, $\wedge$, но находящими свое обоснование в новом контексте. Вне этого контекста, (в частности, в рамках булевой алгебры) непосредственную связь между операциями $\wedge$, $\vee$ и $\rceil$ над нечеткими множествами установить затруднительно.

3. Нечеткие соответствия и отношения

3.1. Способы задания нечетких соответствий

Определение 1. Нечетким соответствием между множествами X и Y называется и через $\tilde{\Gamma} = (X, Y, \tilde{F})$ обозначается тройка множеств, в которой X, Y – произвольные четкие множества, $\tilde{F}$ - нечеткое множество в XxY. Подобно названиям элементов четкого соответствия множество X называют *областью отправления*, множество Y- областью прибытия, а $\tilde{F}$ – нечетким графиком нечеткого соответствия.

Назовем носителем нечеткого соответствия $\tilde{\Gamma} = (X, Y, \tilde{F})$ соответствие $\Gamma = (X, Y, F)$, у которого график F является носителем нечеткого графика $\tilde{F}$.

Нечеткое соответствие может быть задано теоретико-множественно, графически и в матричном виде.

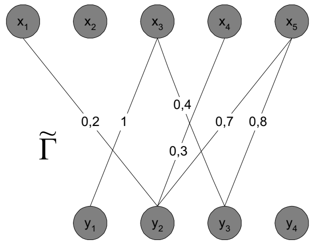
Для теоретико-множественного задания нечеткого соответствия необходимо перечислить элементы множеств X и Yи задать нечеткое множество $\tilde{F}$ в XxY.

В матричном виде нечеткое соответствие $\tilde{\Gamma} = (X, Y, \tilde{F})$ задается с помощью матрицы инциденций R_Γ, строки которой помечены элементами $x_i \in X$ (i∈ I={1, 2, …, n}), столбцы – элементами $y_i \in$ Y ($j \in J=\{1, 2, ...,m\}$), а на пересечении строки x_i и столбца y_j ставится элемент $r_{ij}=m_F<x_i,y_j>$, где m_F – функция принадлежности элементов из XxY нечеткому графику.

Нечеткое соответствие можно задать в виде ориентированного графа с множеством вершин $X \cup Y$, каждой дуге $<x_i, y_j>$, которого приписано значение $\mu_F<x_i,y_j>$ функции принадлежности.

Пример 1. Зададим некоторое нечеткое соответствие $\tilde{\Gamma} = (X,Y, \tilde{F})$, определивши X и Y как $X= \{x_1,x_2,...,x_5\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$,

$\widetilde{F}$ $=\{<0,2/<x_1,y_2>>, <1/<x_3,y_1>>, <0,4/<x_3,y_3>>, <0,3/<x_4,y_2>>, <0,7/<x_5,y_2>>, <0,8/<x_5,y_3>>\}$. Матрица инциденций $R_Г$ и граф нечеткого соответствия изображены на рис. 6.



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ R_{Г} = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} & \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

Рис. 6 Графическое и матричное задание нечеткого соответствия $\widetilde{\Gamma}$ = (X, У, $\widetilde{F}$).

Аналогично степени равенства множеств введем понятие степени равенства двух нечетких соответствий.

Определение 2. Пусть $\widetilde{\Gamma}=(X, У, \widetilde{F})$, $\widetilde{\Delta}=(X, У, \widetilde{P})$ – некоторые нечеткие соответствия между множествами X и Y. Определим степень равенства $\mu(\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Delta})$ с помощью выражения

$$\mu(\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Delta}) = \underset{<x,y\in XxY>}{\&} (\mu_F < x,y > \leftrightarrow \mu_p < x,y >)$$

Если $\mu(\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Delta}) \geq 0,5$, то будем полагать, что соответствия $\widetilde{\Gamma}$ и $\widetilde{\Delta}$ нечетко равны, и обозначать это $\widetilde{\Gamma} \approx \widetilde{\Delta}$. Если $\mu(\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Delta}) \leq 0,5$, то полагаем, что $\widetilde{\Gamma}$ и $\widetilde{\Delta}$ нечетко не равны, и обозначаем это $\widetilde{\Gamma} \not\approx \widetilde{\Delta}$. В случае, когда $\mu(\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Delta})=0,5$, соответствия $\widetilde{\Gamma}$ и $\widetilde{\Delta}$ одновременно нечетко равны и не равны, т.е. взаимно индифферентны. Это обозначается $\widetilde{\Gamma} \sim \widetilde{\Delta}$.

3.2. *Образ и прообраз множества при нечетком соответствии*

Дадим определения инверсии и композиции нечетких соответствий.

Определение 3. Инверсией нечеткого соответствия $\widetilde{\Gamma} = (X, У, \widetilde{F})$ обозначается нечеткое соответствие $\widetilde{\Gamma}^{-1} = (X, У, \widetilde{F}^{-1})$, у которого график $\widetilde{F}^{-1}$ является инверсией графика $\widetilde{F}$, множество Y – областью отправления, а X – областью прибытия.

Определение 4. Композицией нечетких соответствий $\widetilde{\Gamma} = (X, У, \widetilde{F})$ и $\widetilde{\Delta} = (Y, Z, \widetilde{P})$ называется нечеткое соответствие $\widetilde{\Phi} = (X, Z, \widetilde{S})$, обозначаемое $\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Gamma} \circ \widetilde{\Delta}$, у которого область отправления совпадает с областью отправления соответствия $\widetilde{\Gamma}$, область прибытия – с областью прибытия соответствия $\widetilde{\Delta}$, а графиком $\widetilde{S}$ является композиция графиков $\widetilde{F}$ и $\widetilde{P}$.

Пример 2. Пусть $\widetilde{\Gamma}$ и $\widetilde{\Delta}$ — нечеткие соответствия, графы которых определению композиции, показан на рис. 6 и рис. 7. Граф соответствия $\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Gamma} \circ \widetilde{\Delta}$, построенного по определению композиции, показан на рис. 8.

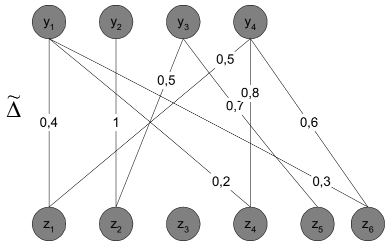


Рис. 7 Граф нечеткого соответствия $\widetilde{\Delta}$

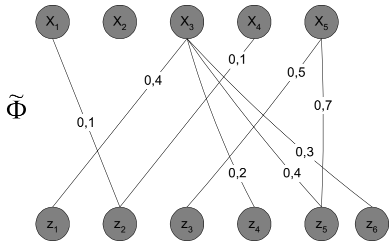


Рис. 8 Граф нечеткого соответствия $\widetilde{\Phi}$

Пусть $\widetilde{\Gamma} = (X, Y, \widetilde{F})$ - нечеткое соответствие, а $\widetilde{\mathrm{A}}$ – нечеткое множество в X с функцией принадлежности μ_{A}.

Образом множества $\widetilde{\mathrm{A}}$ при соответствии $\widetilde{\Gamma}$ называется нечеткое множество $\widetilde{\Gamma}(\widetilde{\mathrm{A}})$ в Y, определяемое выражением

$$\widetilde{\Gamma}(\widetilde{\mathrm{A}}) = \{< \mu_{\text{г (A)}}(y), y >\}, y \in Y, \text{где}$$

$$\mu_{\text{г (A)}}(y) = \vee_{x \in \mathrm{A}} (\mu_{\mathrm{A}}(x) \& \mu_{\mathrm{F}} < x, y >).$$

Иначе говоря, поскольку каждый элемент $y \in Y$ может соответствовать нескольким элементам $x \in A$, где A – носитель множества $\widetilde{\mathrm{A}}$, то значение функции принадлежности элемента y нечеткому множеству $\widetilde{\Gamma}(\widetilde{\mathrm{A}})$ определяется как наибольшее из значений, получаемых с помощью выбора минимального между значениями функции принадлежности каждого $x \in A$ нечеткому множеству $\widetilde{\mathrm{A}}$ и значением функции принадлежности пары *(x, y)* нечеткому графику $\widetilde{F}$. Если находится образ $\widetilde{\Gamma}(\widetilde{\mathrm{A}})$ четкого множества A при соответствии $\widetilde{\Gamma}$, то

$$\widetilde{\Gamma}(\widetilde{\mathrm{A}}) = \{< \mu_{\text{г (A)}}(y), y >\}, y \in Y, \text{где}$$

$$\mu_{\text{г (A)}}(y) = \cup_{x \in \mathrm{A}} \mu_{\mathrm{F}} < x, y >.$$

Пример 3. Пусть дано нечеткое соответствие $\widetilde{\Gamma}$, граф которого изображен на рис. 6. Дано нечеткое подмножество

$\widetilde{\mathrm{A}}$ *={< 0,6/x1>,<0,9/x4>, <0,1/x5>)* множества X. Необходимо найти образ $\widetilde{\mathrm{A}}$ при соответствии $\widetilde{\Gamma}$. С этой целью для каждого у∈ У определим значение

$$\mu_{\text{г (A)}}(y_1) = (\mu_{\mathrm{A}}(x_1) \& \mu_{\mathrm{F}} < x_1, y_1 >) \vee (\mu_{\mathrm{A}}(x_4) \& \mu_{\mathrm{F}} < x_4, y_1 >) \vee$$

$$\vee (\mu_{\mathrm{A}}(x_5) \& \mu_{\mathrm{F}} < x_5, y_1 >) = 0;$$

$$\mu_{\text{г (A)}}(y_2) = (\mu_{\mathrm{A}}(x_1) \& \mu_{\mathrm{F}} < x_1, y_2 >) \vee (\mu_{\mathrm{A}}(x_4) \& \mu_{\mathrm{F}} < x_4, y_2 >) \vee$$

$\vee(\mu_{A}(x_5)\&\mu_{F}<x_5,y_2>)=(0{,}6\&0{,}2)\vee(0{,}9\&0{,}3)\vee(0{,}1\&0{,}7)=$
$=0{,}2\vee 0{,}3\vee 0{,}1=0{,}3$

Продолжая аналогично, находим $\mu_{Г\ (A)}(y_3)=0{,}1$; $\mu_{Г\ (A)}(y_4)=0$.

Образом множества $\tilde{A}$ при соответствии $\tilde{\Gamma}=(X, Y, \tilde{F})$ является нечеткое множество $\tilde{\Gamma}(\tilde{A})=\{<0{,}3/y_2>,<0{,}1/y_3>\}$.

Для образов нечетких подмножеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ множества X при нечетком соответствии $\tilde{\Gamma}=(X, Y, \tilde{F})$ справедливы следующие свойства.

Если $\tilde{A}\subsetneqq \tilde{B}$, то

$\tilde{\Gamma}(\tilde{A})\subseteq \tilde{\Gamma}(\tilde{B})$,

$\tilde{\Gamma}(\tilde{A}\cup\tilde{B})\approx\tilde{\Gamma}(\tilde{A})\cup\tilde{\Gamma}(\tilde{B})$,

$\tilde{\Gamma}(\tilde{A}\cap\tilde{B})\approx\tilde{\Gamma}(\tilde{A})\cap\tilde{\Gamma}(\tilde{B})$

Если $\tilde{\Gamma}=(X, Y, \tilde{F})$ и $\tilde{\Delta}=(Y, Z, \tilde{P})$ – нечеткие соответствия, а $\tilde{\Phi}=(X, Z, \tilde{S})$ их композиция, то для нечеткого множества $\tilde{A}$ в X имеет место $\tilde{\Phi}(\tilde{A})\approx(\tilde{\Gamma}\circ\tilde{\Delta})(\tilde{A})\approx\tilde{\Delta}(\tilde{\Gamma}(\tilde{A}))$.

По аналогии с четкими соответствиями вводится понятие прообраза нечеткого множества при данном нечетком соответствии.

Пусть $\tilde{\Gamma}=(X, Y, \tilde{F})$ – нечеткое соответствие, а $\tilde{B}$ – нечеткое множество в Y с функцией принадлежности μ_B. *Прообразом* $\tilde{\Gamma}^{-1}(\tilde{B})$ множества $\tilde{B}$ при соответствии $\tilde{\Gamma}$ называется нечеткое множество $\tilde{\Gamma}^{-1}(\tilde{B})$ в X, определяемое следующим выражением:

$\tilde{\Gamma}^{-1}(\tilde{B})=\{<\mu_{\Gamma^{-1}(B)}(x),x>\}, x\in X$, где

$$\mu_{\Gamma^{-1}(B)}(x)=\bigvee_{y\in B}(\mu_B(y)\&\mu_F<x,y>).$$

Нетрудно заметить, что прообраз множества $\tilde{B}$ при соответствии $\tilde{\Gamma}$ совпадает с образом $\tilde{B}$ при соответствии $\tilde{\Gamma}^{-1}$. Отсюда следует, что свойства, которыми обладает прообраз нечеткого множества при соответствии $\widetilde{\Gamma}$, совпадают со свойствами образа этого множества при соответствии $\widetilde{\Gamma}^{-1}$.

3.3. Основные свойства нечетких соответствий

Основными свойствами нечетких соответствий являются нечеткая функциональность, нечеткая инъективность, нечеткая всюду определенность, нечеткая сюръективность, нечеткая биективность.

Для четких соответствий $\Gamma = (X, \mathrm{Y}, F)$ свойство функциональности, определенное как отсутствие в графике F двух пар вида $<x, y_1>$ и $<x, y_2>$, $y_1 \neq y_2$, можно задать, используя понятие прообраза при данном соответствии. Действительно, соответствие $\Gamma = (X, \mathrm{Y}, F)$ нефункционально, если для каких-либо двух элементов $y_1, y_2 \in Y$ имеет место $\Gamma^{-1}(\mathrm{y}_1) \cap \Gamma^{-1}(\mathrm{y}_2) \neq \varnothing$. Отсюда в функциональном соответствии для любых $y_1, y_2 \in Y$ справедливо $\Gamma^{-1}(\mathrm{y}_1) \cap \Gamma^{-1}(\mathrm{y}_2) = \varnothing$. Эти рассуждения будем использовать в дальнейшем.

Пусть $\widetilde{\Gamma} = (X, Y, \widetilde{F})$ – произвольное нечеткое соответствие. Запишем для каждого $\mathrm{y} \in \mathrm{Y}$ нечеткое множество $\Gamma^{-1}(\mathrm{y})$.

$\Gamma^{-1}(\mathrm{y}) = \{< \mu_{\Gamma^{-1}(\mathrm{y})}(x) / x >\}$, где $\mu_{\Gamma^{-1}(\mathrm{y})}(x) = \mu_{\mathrm{F}} < x, y >$, поскольку $B=\{y\}$, а $\mu_B = 1$. Получим семейство нечетких прообразов всех элементов прибытия соответствия $\widetilde{\Gamma}$.

Определение 5. Степень нефункциональности соответствия $\widetilde{\Gamma}$ будем называть величину $\alpha(\widetilde{\Gamma})_{\mathrm{fon}}$ и определим ее с помощью выражения

$$\alpha(\widetilde{\Gamma})_{\mathrm{fon}} = \bigvee_{y_i, y_j \in Y} \left(\bigvee_{x \in X} (\mu_{\Gamma^{-1}(\mathrm{y_i})}(x) \& \mu_{\Gamma^{-1}(\mathrm{y_j})}(x)) \right).$$

Из определения следует, что величина $\alpha(\widetilde{\Gamma})_{\mathrm{fon}}$ совпадает с наибольшим значением функции принадлежности тех элементов $x \in X$, которые являются одновременно нечеткими прообразами любых двух элементов $y_1, y_2 \in Y$. Если $\alpha(\widetilde{\Gamma})_{\text{fon}} \geq 0{,}5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ *нечетко нефункционально*.

Определение 6. Степень функциональности соответствия $\widetilde{\Gamma}$ будем называть величину $\beta(\widetilde{\Gamma})_{\text{fon}}$ и определим ее с помощью выражения $\beta(\widetilde{\Gamma})_{\text{fon}} = 1 - \alpha(\widetilde{\Gamma})_{\text{fon}}$.

Если $\beta(\widetilde{\Gamma})_{\text{fon}} \geq 0{,}5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ *нечетко функционально*. Если $\alpha(\widetilde{\Gamma})_{\text{fon}} = \beta(\widetilde{\Gamma})_{\text{fon}} = 0{,}5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко функционально и нечетко нефункционально, т.е. функционально *индифферентно*. Нетрудно видеть, что в случае, когда соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко функционально, для любых $y_i, y_j \in Y$ справедливо, что $\widetilde{\Gamma}^{-1}(y_i) \cap \widetilde{\Gamma}^{-1}(y_j) \approx \varnothing$.

Пример 4. Пусть задано нечеткое соответствие $\widetilde{\Gamma} = (X, Y, \widetilde{F})$, показанное на рис.9.

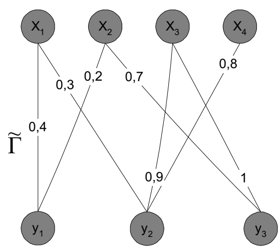


Рис. 9 Граф нечеткого соответствия.

Для каждого $y \in Y$ определим $\widetilde{\Gamma}^{-1}(y)$. Получим $\widetilde{\Gamma}^{-1}(y_2) = \{<0{,}3/x_1>, <0{,}9/x_3>, <0{,}8/x_4>\}$,

$$\widetilde{\Gamma}^{-1}(y_2) = \{<0{,}3/x_1>, <0{,}9/x_3>, <0{,}8/x_4>\},$$

$$\widetilde{\Gamma}^{-1}(y_3) = \{<0{,}7/x_2>, <1/x_3>\}.$$

Определим $\alpha(\widetilde{\Gamma})_{\text{fon}}$.

$$\alpha(\widetilde{\Gamma})_{\text{fon}} = ((0{,}4\&0{,}3) \vee (0{,}4\&0) \vee (0{,}2\&0) \vee (0{,}2\&0{,}7) \vee$$
$$\vee(0\&0{,}9) \vee (0\&1) \vee (0\&0{,}8) \vee (0\&0) \vee (0{,}3\&0) \vee (0\&0{,}7) \vee$$
$$\vee(0{,}9\&1) \vee (0{,}8\&0)) = 0{,}3 \vee 0{,}2 \vee 0{,}9 = 0{,}9$$
$$\vee(0{,}9\&1) \vee (0{,}8\&0)) = 0{,}3 \vee 0{,}2 \vee 0{,}9 = 0{,}9\,.$$

Отсюда $\beta(\widetilde{\Gamma})_{\text{fon}} = 0{,}1$. Соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко нефункционально.

Легко заметить, что если носитель $\Gamma(X, Y, F)$ нечеткого соответствия $\widetilde{\Gamma}(X, Y, \widetilde{F})$ является функциональным соответствием , то величина $\alpha(\widetilde{\Gamma})_{\text{fon}} = 0$, $\beta(\widetilde{\Gamma})_{\text{fon}} = 1$, т.е. соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко функционально.

Определим степень неинъективности и инъективности нечеткого соответствия. Для четкого соответствия $\Gamma(X, Y, F)$ свойство неинъективности можно записать как наличие хотя бы двух таких элементов $x_1, x_2 \in X$, для которых $\Gamma(x_1) \cap \Gamma(x_2) \neq \varnothing$, а свойство инъективности заключается в том, что для любых $x_i, x_j \in X$ справедливо $\Gamma(x_1) \cap \Gamma(x_2) = \varnothing$.

Пусть $\widetilde{\Gamma}(X, Y, \widetilde{F})$ – произвольное нечеткое соответствие. Определим для каждого $x \in X$ нечеткое множество $\widetilde{\Gamma}(x)$:

$\widetilde{\Gamma}(x) = \{< \mu_{\Gamma(x)}(y) / y >\}, y \in Y$, где $\mu_{\Gamma(x)}(y) = \mu_F < x, y >$,

поскольку $A=\{x\}$, $\mu_A(x) = 1$. Получим семейство нечетких образов для всех элементов области отправления соответствия $\widetilde{\Gamma}$.

Определение 7. Степенью неинъективности соответствия $\widetilde{\Gamma}$ будем называть величину $\alpha(\widetilde{\Gamma})_{\text{inj}}$ и определим ее с помощью выражения $\alpha(\widetilde{\Gamma})_{\text{inj}} = \underset{x_i, x_j \in X}{\vee}\left(\underset{y \in Y}{\vee} (\mu_{\Gamma(x_i)}(y) \& \mu_{\Gamma(x_j)}(y)) \right)$.

Если $\alpha(\widetilde{\Gamma})_{\text{inj}} \geq 0{,}5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко неинъективно.

Определение 8. Степенью инъективности соответствия $\widetilde{\Gamma}$ будем называть величину $\beta\ (\widetilde{\Gamma})_{\text{inj}}$ и определим ее с помощью выражения $\beta\,(\widetilde{\Gamma})_{\text{inj}} = 1 - \alpha\,(\widetilde{\Gamma})_{\text{inj}}$.

Если $\beta\ (\widetilde{\Gamma})_{\text{inj}}\ \geq 0{,}5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко инъективно.

Если $\alpha\ (\widetilde{\Gamma})_{\text{inj}} = \beta\ (\widetilde{\Gamma})_{\text{inj}} = 0{,}5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко инъективно и нечетко неинъективно, т.е. инъективно *индифферентно*. В случае, когда соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко инъективно, для любых $x_i, x_j \in X$ справедливо, что $\widetilde{\Gamma}^{-1}(\mathrm{x_i}) \cap \widetilde{\Gamma}^{-1}(\mathrm{x_j}) \approx \varnothing$.

Легко заметить, что если носитель $\Gamma(\mathrm{X,Y,F})$ нечеткого соответствия $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \widetilde{\mathrm{F}})$ является инъенктивным соответствием , то величина $\alpha\ (\widetilde{\Gamma})_{\text{inj}} = 0$, $\beta\ (\widetilde{\Gamma})_{\text{inj}} = 1$, т.е. соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко инъенктивно.

Определение 9. Степенью всюду определенности соответствия $\widetilde{\Gamma}$ будем называть величину $\beta\,(\widetilde{\Gamma})_{\text{def}}$ и определим ее с помощью выражения $\beta\,(\widetilde{\Gamma})_{\text{def}} = \underset{x \in X}{\&}\left(\underset{y \in \widetilde{\Gamma}(x)}{\vee} \mu_{\Gamma(x)}(y)\right)$.

Если $\beta\,(\widetilde{\Gamma})_{\text{def}} \geq 0{,}5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко всюду определено. Если $\beta\,(\widetilde{\Gamma})_{\text{def}} \leq 0{,}5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко не всюду определено.

Если $\beta\,(\widetilde{\Gamma})_{\text{def}} = 0{,}5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ индифферентно относительно всюду определенности. В случае, когда соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко всюду определено, для любого $x \in X$ справедливо $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{x}) \not\approx \varnothing$.

Если носитель $\Gamma(\mathrm{X,Y,F})$ нечеткого соответствия $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \widetilde{\mathrm{F}})$ является не всюду определенным соответствием, то $\beta\,(\widetilde{\Gamma})_{\text{def}} = 0$.

Определение 10. Степенью нечеткой сюръективности соответствия $\widetilde{\Gamma}$ будем называть величину $\beta(\widetilde{\Gamma})_{sur}$ и определим ее с помощью выражения

$$\beta(\widetilde{\Gamma})_{sur} = \underset{y\in Y}{\&}\left(\underset{x\in\Gamma^{-1}(y)}{\vee}\mu_{\Gamma^{-1}(y)}(x)\right).$$

Если $\beta(\widetilde{\Gamma})_{sur} \geq 0,5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ *нечетко сюръективно.* Если $\beta(\widetilde{\Gamma})_{sur} \leq 0,5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ *нечетко не сюръективно.* Если $\beta(\widetilde{\Gamma})_{sur} = 0,5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ *сюръективно индифферентно.*

В случае, когда соответствие $\widetilde{\Gamma}$ нечетко сюръективно, для любого $y \in Y$ справедливо $\widetilde{\Gamma}^{-1}(y) \not\approx \varnothing$.

Если носитель $\Gamma(X, Y, F)$ нечеткого соответствия $\widetilde{\Gamma}(X, Y, \widetilde{F})$ является несюръективным соответствием, то $\beta(\widetilde{\Gamma})_{sur} = 0$.

Пример 5. Рассмотрим нечеткое соответствие $\widetilde{\Gamma}(X, Y, \widetilde{F})$, показанное на рис 10. Для каждого $x \in X$ запишем $\widetilde{\Gamma}(x)$. Получим

$\widetilde{\Gamma}(x_1) = \{<0{,}3/y_1>, <0{,}8/y_2>\}$,

$\widetilde{\Gamma}(x_2) = \{<0{,}1/y_1>, <0{,}7/y_2>, <0{,}5/y_3>\}$,

$\widetilde{\Gamma}(x_3) = \{<0{,}6/y_1>, <0{,}4/y_2>, <0{,}2/y_3>, <0{,}9/y_4>\}$.

Найдем

$$\beta(\widetilde{\Gamma})_{def} = (0{,}3 \vee 0{,}8)\&(0{,}1 \vee 0{,}7 \vee 0{,}5)\&(0{,}6 \vee 0{,}4 \vee 0{,}2 \vee 0{,}9) =$$
$$= 0{,}8\&0{,}7\&0{,}9 = 0{,}7.$$

Следовательно, соответствие $\widetilde{\Gamma}$ является нечетко всюду определенным. Запишем для каждого $y \in Y$ этого же соответствия множества $\widetilde{\Gamma}^{-1}$. Получим $\widetilde{\Gamma}^{-1}(y_1) = \{<0{,}3/x_1>, <0{,}1/x_2>, <0{,}6/x_3>\}$,

$\widetilde{\Gamma}^{-1}(y_2) = \{<0{,}8/x_1>, <0{,}7/x_2>, <0{,}4/x_3>\}$,

$\widetilde{\Gamma}^{-1}(y_3) = \{< 0{,}5 / x_2 >, < 0{,}2 / x_3 >\}$,

$\widetilde{\Gamma}^{-1}(y_4) = \{< 0{,}9 / x_3 >\}$.

Находим

$$\beta(\widetilde{\Gamma})_{sur} = (0{,}3 \vee 0{,}1 \vee 0{,}6) \& (0{,}8 \vee 0{,}7 \vee 0{,}4) \& (0{,}5 \vee 0{,}2) \& (0{,}9) =$$

$= 0{,}6 \& 0{,}8 \& 0{,}5 \& 0{,}9 = 0{,}5$. Отсюда следует, что соответствие $\widetilde{\Gamma}$ сюръективно индифферентно.

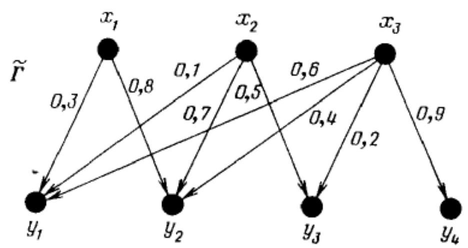


Рис. 10 Граф нечеткого соответствия из примера 5.

Определение 10. Степенью нечеткой биективности соответствия $\widetilde{\Gamma}$ будем называть величину $\beta(\widetilde{\Gamma})_{\mathrm{bij}}$ и определим ее с помощью выражения

$$\beta(\widetilde{\Gamma})_{\mathrm{bij}} = \beta(\widetilde{\Gamma})_{\mathrm{fon}} \& \beta(\widetilde{\Gamma})_{\mathrm{def}} \& \beta(\widetilde{\Gamma})_{\mathrm{sur}}.$$

Если $\beta(\widetilde{\Gamma})_{\mathrm{bij}} \geq 0{,}5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ *нечетко биективно.* Если $\beta(\widetilde{\Gamma})_{\mathrm{bij}} \leq 0{,}5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ *нечетко небиективно.* Если $\beta(\widetilde{\Gamma})_{\mathrm{bij}} = 0{,}5$, то соответствие $\widetilde{\Gamma}$ *биективно индифферентно.*

3.4. Способы задания нечетких отношений

Определение 11. Нечетким отношением на непроизвольном непустом множестве X называется и через $\widetilde{\varphi}(X, \widetilde{F})$ обозначается пара множеств, в которой $\widetilde{F}$ является нечетким подмножеством X^2.

В отношении $\widetilde{\varphi}(X, \widetilde{F})$ множество X называется областью задания, а $\widetilde{F}$ нечетким графиком отношения. Нетрудно видеть, что нечеткое отношение представляет собой частный случай нечеткого соответствия $\widetilde{\Gamma} = (X, Y, \widetilde{F})$, у которого $X=Y$.

Носителем нечеткого отношения $\widetilde{\varphi}(X, \widetilde{F})$, называется четкое отношение $\varphi(X, \widetilde{F})$, у которого график F является носителем графика $\widetilde{F}$. Существуют четыре способа задания нечетких отношений: теоретико-множественный, графический и с помощью нечетких предикатов.

Для задания нечеткого отношения в теоретико-множественном виде необходимо перечислить множество $X=\{x_i\}$ $(i \in I=\{1,2...,n\})$ и задать нечеткий график $\widetilde{F} = \{<\mu_F<x_i, x_j>, <x_i, x_j>>\}, <x_i, x_j> \in X^2$.

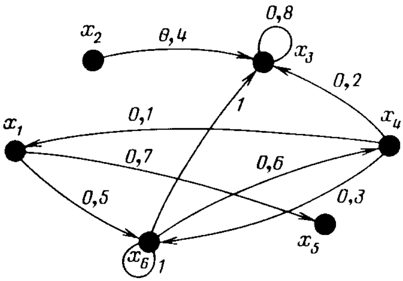
В матричном виде нечеткое отношение $\widetilde{\varphi}$ задается с помощью матрицы смежности R_φ, строки и столбцы которой помечены элементами $x \in X$, а на пересечении i-й строки и j-го столбца ставится элемент $r_{ij} = \mu_F < x_i, x_j >$, где μ_F - функция принадлежности элементов из X^2 нечеткому графику $\widetilde{F}$.

Нечеткое отношение $\widetilde{\varphi}(X, \widetilde{F})$ можно задать в виде графа с множеством вершин X, дугам $< x_i, x_j >$ которого приписано соответствующее значение $\mu_F < x_i, x_j >$ функции принадлежности.

Пример 6. Зададим некоторое нечеткое отношение $\widetilde{\varphi}(X, \widetilde{F})$, у которого $X=\{x_1, x_2, ..., x_6\}$, а нечеткий график

$$\widetilde{F} = \{< 0{,}5/ < x_1, x_6 >>,$$
$$< 0{,}7/ < x_1, x_5 >>, < 0{,}4/ < x_2, x_3 >>, < 0{,}8/ < x_3, x_3 >>,$$
$$< 0{,}2/ < x_4, x_3 >>, < 0{,}1/ < x_4, x_1 >>, < 0{,}3/ < x_4, x_6 >>,$$
$$< 0{,}6/ < x_6, x_4 >>, < 1/ < x_6, x_3 >>, < 1/ < x_6, x_6 >>\}.$$

Матрица смежности и граф этого отношения показаны на рис.11.



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0	0	0,7	0,5
x_2	0	0	0,4	0	0	0
x_3	0	0	0,8	0	0	0
x_4	0,1	0	0,2	0	0	0,3
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	1,0	0,6	0	1,0

Рис. 11 Матрица смежности и граф отношения из примера 6.

Пусть $\varphi(X,\widetilde{F})$ - произвольное нечеткое отношение. Если $<\mu_F<a,b>/<a,b>>\in\widetilde{F},a,b\in X$, то выражение $a\widetilde{\varphi}b$ представляет собой нечеткое логическое высказывание, значение истинности которого равно $\mu_F<a,b>$. Отсюда следует, что для задания некоторого нечеткого отношения $\widetilde{\varphi}$ на X нечеткую логическую формулу $x_i\widetilde{\varphi}x_j$ от двух переменных или нечеткий предикат, который определен на множестве X^2, а значение принимает из интервала $[0;1]$.

Определение 12. Пусть $\widetilde{\varphi}(X,\widetilde{F})$ и $\widetilde{\psi}(X,\widetilde{P})$ – некоторые отношения на X. Степень равенства отношений $\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}$ обозначается $\mu(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})$, где

$$\mu(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})=\underset{<x_i,x_j>\in X^2}{\&}(\mu_F<x_i,x_j>\leftrightarrow\mu_P<x_i,x_j>).$$

Если $\mu(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\geq 0,5$, то отношения $\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}$ будем называть нечетко равными и обозначать $\widetilde{\varphi}\approx\widetilde{\psi}$. Если $\mu(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\leq 0,5$ то отношения $\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}$ нечетко не равны и обозначать $\widetilde{\varphi}\not\approx\widetilde{\psi}$. В случае, когда $\mu(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})=0,5$, отношения $\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}$ одновременно нечетко равны и нечетко не равны, т.е. взаимно индифферентны, что обозначается $\widetilde{\varphi}\sim\widetilde{\psi}$.

Определение 13. Пусть $\widetilde{\varphi}(X,\widetilde{F})$ - некоторое отношение на X. Степенью нечеткости отношения называется величина $\rho(\widetilde{\varphi})$, где $\rho(\widetilde{\varphi}) = 1 - \mu(\widetilde{\varphi},\varphi)$, где φ – носитель нечеткого отношения $\widetilde{\varphi}$.

На основании этого определения можно записать

$$\rho(\widetilde{\varphi}) = 1 - \underset{<x_i,x_j>\in X^2}{\&}(\mu_{\widetilde{F}} < x_i, x_j > \leftrightarrow \mu_F < x_i, x_j >),$$ где

$$\mu_F < x_i, x_j >= \begin{cases} 1, \text{если} < x_i, x_j >\in F, \\ 0, \text{если} < x_i, x_j >\notin F. \end{cases}$$

Если $\mu_{\widetilde{F}} < x_i, x_j >= 0$, то $< x_i, x_j >\notin F$, т.е. $\mu_F < x_i, x_j >= 0$. Отсюда степень истинности высказывания

$\mu_{\widetilde{F}} < x_i, x_j > \leftrightarrow \mu_F < x_i, x_j >$ равна 1. Поэтому в формуле $\rho(\widetilde{\varphi})$ можно заменить $\underset{<x_i,x_j>\in X^2}{\&}$ на $\underset{<x_i,x_j>\in F}{\&}$. Далее, так как для всех $< x_i, x_j >\in F$ величина $\mu_F < x_i, x_j >= 1$, то выражение $\rho(\widetilde{\varphi})$ можно записать в виде

$$\rho(\widetilde{\varphi}) = 1 - \underset{<x_i,x_j>\in F}{\&}(\mu_{\widetilde{F}} < x_i, x_j > \leftrightarrow 1)$$ или, окончательно,

$$\rho(\widetilde{\varphi}) = 1 - \underset{<x_i,x_j>\in F}{\&}\mu_{\widetilde{F}} < x_i, x_j >.$$

Для любого отношения $\widetilde{\varphi} = (X,\widetilde{F})$ можно получить единственное четкое отношение $\varphi_* = (X, F_*)$, нечетко равное или индифферентное $\widetilde{\varphi}$. Для этого строим график F_* следующим образом:

$$F_* = \{< x_i, x_j >\in X^2\}, \mu_{\widetilde{F}} < x_i, x_j >> 0{,}5.$$

Для любого четкого отношения $\psi = (X, P)$ можно получить бесконечно много отношений $\widetilde{\psi}$, нечетко равных или индифферентных отношений ψ . Для получения любого из них достаточно всем парам $< x_i, x_j >\in P$ приписать значения функции принадлежности большие $0{,}5$, а всем парам из $X^2 \setminus P$ – значения меньшие или равные $0{,}5$. Из построения нечетких отношений, нечетко равных отношению $\psi = (X, P)$, и определения нечеткого равенства следует, что все полученных по ψ нечеткие отношения будут нечетко равны между собой или взаимно индифферентны.

Приведем предположения, позволяющие установить нечеткое равенство или неравенство отношений с точностью до взаимной индифферентности. Пусть заданы два нечетких отношения $\tilde{\varphi} = (X, \tilde{F}), \tilde{\psi} = (X, \tilde{P})$. Построим для них четкие отношения $\varphi_* = (X, F_*), \psi_* = (X, P_*)$.

Предположение 1. Если отношения $\varphi_* = (X, F_*), \psi_* = (X, P_*)$ равны, то нечеткие отношения $\tilde{\varphi} = (X, \tilde{F}), \tilde{\psi} = (X, \tilde{P})$ нечетко равны или взаимно индифферентны.

Предположение 2. Если отношения $\varphi_* = (X, F_*), \psi_* = (X, P_*)$ не равны, то нечеткие отношения $\tilde{\varphi} = (X, \tilde{F}), \tilde{\psi} = (X, \tilde{P})$ нечетко не равны или взаимно индифферентны.

3.5. Операции над нечеткими отношениями

Пусть $\tilde{\varphi} = (X, \tilde{F}), \tilde{\psi} = (X, \tilde{P})$ произвольные нечеткие отношения на множестве X. Будем считать, что отношение $\tilde{\varphi}$ нечетко включается в отношение $\tilde{\psi}$, если $\tilde{F} \subsetapprox \tilde{P}$. Это обозначается $\tilde{\varphi} \subsetapprox \tilde{\psi}$.

Определение 14. Объединением отношений $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ называется нечеткое отношение $\tilde{\eta} = (X, \tilde{S})$, обозначаемое $\tilde{\eta} = \tilde{\varphi} \cup \tilde{\psi}$, если $\tilde{S} = \tilde{F} \cup \tilde{P}$. При этом для любых $x_i, x_j \in X$ справедливо $\mu_S < x_i, x_j >= \mu_F < x_i, x_j > \vee \mu_P < x_i, x_j >$.

Определение 15. Пересечением отношений $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\psi}$ называется нечеткое отношение $\widetilde{\pi} = (X, \widetilde{U})$, обозначаемое $\widetilde{\pi} = \widetilde{\varphi} \cap \widetilde{\psi}$, если $\widetilde{S} = \widetilde{F} \cup \widetilde{P}$. При этом для любых $x_i, x_j \in X$ справедливо $\mu_U < x_i, x_j >= \mu_F < x_i, x_j > \& \mu_P < x_i, x_j >$.

Определение 16. Дополнением отношения $\widetilde{\varphi}$ называется нечеткое отношение $\neg\widetilde{\varphi} = (X, \neg\widetilde{F})$. При этом для любых $x_i, x_j \in X$ справедливо $\mu_{\neg F} < x_i, x_j >= 1 - \mu_F < x_i, x_j >$.

Определение 17. Инверсией отношения $\widetilde{\varphi}$ называется нечеткое отношение $\widetilde{\varphi}^{-1} = (X, \widetilde{F}^{-1})$, такое, что нечеткий график $\widetilde{F}^{-1}$ представляет собой инверсию графика $\widetilde{F}$. При этом для любых $x_i, x_j \in X$ справедливо

$\mu_{F^{-1}} < x_i, x_j >= \mu_F < x_i, x_j >$.

Определение 18. Композицией отношений $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\psi}$ называется нечеткое отношение $\widetilde{k} = (X, \widetilde{V})$, обозначаемое $\widetilde{k} = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}$, если $\widetilde{V} = \widetilde{F} \circ \widetilde{P}$. При этом для любых $x_i, x_j, x_k \in X$ справедливо $\mu_V < x_i, x_j >= \bigcup_{x_k} (\mu_F < x_i, x_k > \& \mu_P < x_i, x_j >)$.

Пример 7. Пусть даны нечеткие отношения $\widetilde{\varphi}(X, \widetilde{F})$ и $\widetilde{\psi} = (X, \widetilde{P})$, графы которых показаны на рис. 12. Графы нечетких отношений $\widetilde{\varphi} \cup \widetilde{\psi}$, $\widetilde{\varphi} \cap \widetilde{\psi}$, $\neg\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\varphi}^{-1}$, $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}$ показаны на рис. 13.

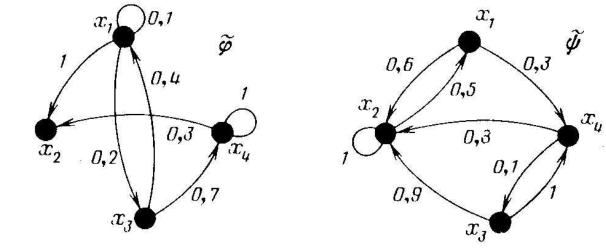


Рис.12 Исходные графы нечетких отношений из примера 7.

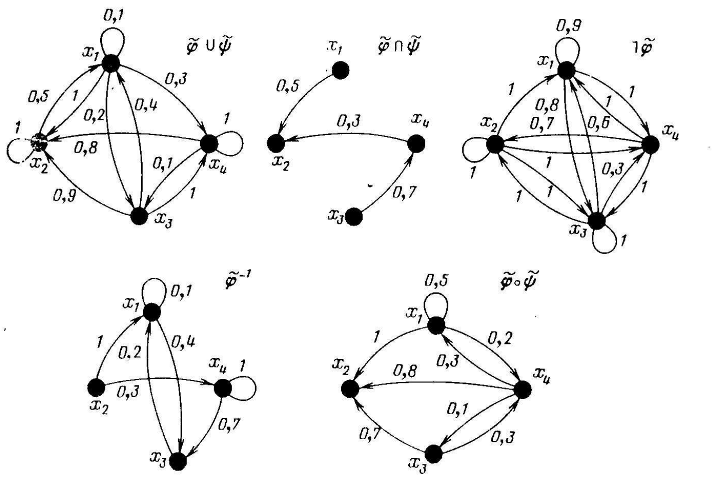


Рис.13 Результирующие графы нечетких отношений из примера 7.

4.1. Задача принятия решений с одним экспертом

Задано множество возможных решений или альтернатив $U=\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ и нечетное отношение нестрогого предпочтения (н.о.п.) R на множестве U с функцией принадлежности $\mu_R(u_i, u_j)\in [0, 1]$ – любое рефлексивное нечеткое отношение на U, так что $\mu_R(u_i, u_j)=1, u_i\in U$.

Н.о.п. задается обычно лицом, принимающим решения в результате опроса экспертов, обладающих знаниями или представлениями о содержании или существе задачи, которые не были формализованы в силу чрезмерной сложности такой формализации или по другим причинам.

Для любой пары альтернатив $u_i, u_j\in U$ значения $\mu_R(u_i, u_j)$ понимается как степень предпочтения "u_i, не хуже u_j", в записи $u_i \geq u_j$. Равенство $\mu_R(u_i, u_j)=0$ может означать как то, что $\mu_R(u_j, u_i)>0$, то есть с положительной степенью выполнено "обратное" предпочтение $u_j \geq u_i$, так и то, что и $\mu_R(u_j, u_i)=0$, то есть альтернативы u_j и u_i несравнимы. Рефлексивность н.о.п. отражает тот естественный факт, что любая альтернатива не хуже самой себя.

Задача принятия решения заключается в рациональном выборе наиболее предпочтительных альтернатив из множества U, на котором задано нечеткое отношение предпочтения R.

Алгоритм решения задачи

1. Строится нечеткое отношение строгого предпочтения R^S, ассоциированное с R, определяемое функцией принадлежности

$$(u_i,u_j)=\begin{cases}\mu_R(u_i,u_j)-\mu_R(u_j,u_i), \mu_R(u_i,u_j)>\mu_R(u_j,u_i),\\ 0,\ \mu_R(u_i,u_j)\leq\mu_R(u_j,u_i).\end{cases}$$

Это отношение может быть представлено в виде $R^S=R\backslash R^T$, где R^T – "обратное" отношение (матрица отношений R^T получается транспонированием матрицы отношений R).

2. Строится нечеткое подмножество $U_R^{nd}\subset U$ недоминируемых альтернатив, ассоциированное с R и включающее те альтернативы, которые не доминируются никакими другими, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_R{}^{nd}(u_i)=\min_{u_j\in U}\{(1-\mu_R{}^S(u_J,u_i))\}=1-\max_{u_j\in U}\{\mu_R{}^S(u_J,u_i)\}, u_i\in U.$$

Для любой альтернативы $u_j \in U$ значение $\mu_R{}^{nd}(u_i)$ понимается как степень недоминируемости этой альтернативы, то есть степень с которой u_i не доминируется ни одной из альтернатив множества U; $\mu_R{}^{nd}(u_i) = \alpha$ означает , что никакая альтернативы u_j не может быть лучше u_i со степенью доминирования большей α; иначе говоря, u_i может доминироваться другими альтернативами, но со степенью не выше 1-α. Рациональным естественно считать выбор альтернатив, имеющих по возможности большую степень принадлежности множеству U_R^{nd}.

3. Выбирается та альтернатива u^*, для которой значение $\mu_R{}^{nd}(u^*)$ максимально: $u^* = \arg\max\limits_{u_i \in U} \mu_R{}^{nd}(u_i)$.

Она и дает решение задачи. Если наибольшую степень недоминируемости имеет не одна, а несколько альтернатив, то л.п.р. может либо сам выбрать одну из них, исходя из каких-либо дополнительных соображений, либо расширить круг экспертов при формировании исходных данных задачи и повторить ее решение.

Пример.

На множестве U из четырех альтернатив u_1, u_2, u_3, u_4 задано отношение R матрицей M_R, тогда отношение R^S определяется матрицей $M_R{}^S$:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 1 & 1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_R{}^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 1 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Для построения множества $U_R{}^{nd}$ предварительно определяются максимальные элементы в столбцах матрицы $M_R{}^S$:
$m=[1;\ 0{,}4;\ 0{,}3;\ 1]$, тогда $V_R{}^{nd}=[0;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0]$.

Так как $\mu_R{}^{nd}(u_3) = 0{,}7 = \max \mu_R{}^{nd}(u_i),$ *то* $u^* = u_3$.

Если же

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 1 & 0{,}6 & 0{,}9 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix} M_R{}^S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$m=[0,4;\ 1;\ 1;\ 0,4]$, тогда $V_R{}^{nd}=[0,6;\ 0;\ 0;\ 0,6]$. В этом случае в качестве u^* может быть выбрана как альтернатива $u1$, так и $u4$.

4.2. Задача принятия решения с группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами

На множестве всевозможных решений (альтернатив) $U=\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ задано несколько нечетких отношений нестрогого предпочтения (н.о.п.). Н.О.П. R_k получены в результате опроса каждого эксперта и заполнении матрицы нечеткого отношения нестрогого предпочтения (н.о.п.) R_k, каждый элемент которой есть значение функции принадлежности $\mu_R(u_i, u_j)$, выражающее степень предпочтительности альтернативы u_i, по сравнению с u_j. При $\mu(u_i, u_j)>0$ u_i предпочтительнее, чем u_j; если же $\mu(u_i, u_j)=0$, то либо первая альтернатива хуже второй, либо они несравнимы. Лицо, принимающее решение по-разному относится к экспертам, что находит отражение в весовых коэффициентах λ_k, (где

$0\le\lambda_i\le 1$, $\sum \lambda_k = 1$), соответствующих каждому из них.

Алгоритм решения задачи

1. Строится свертка P отношений как пересечение нечетких отношений нестрогого предпочтения экспертов $P=\cap R_k(u_i, u_j)=\min\{\mu(u_i, u_j)\}$; таким образом, получается новое нечеткое отношение нестрогого предпочтения. Далее с н.о.п. ассоциируется отношение строгого предпочтения $P^s=P\backslash P^T$, с функцией принадлежности $\mu_P{}^s$.

$$\mu(R^S,u_i,u_j) = \begin{cases} \mu(R,u_i,u_j) - \mu(R^S,u_i,u_j), \text{ если } \mu(R,u_i,u_j) > \mu(R^S,u_i,u_j); \\ 0, \text{ если } \mu(R,u_i,u_j) \le \mu(R^S,u_i,u_j). \end{cases}$$

Далее определяется множество недоминирующих альтернатив $U(P^s;\ nd)$ с функцией принадлежности $\mu^S(nd, u_i) = 1 - \max_j\{\mu_P{}^S(nd, u_i)\}$.

2. Строим выпуклую свертку Q отношений R_K, которая определяется как $Q = \sum \lambda_K R_K$, $\mu_Q(u_i, u_j)=\Sigma\lambda_k\mu_k(u_i, u_j)$. Она является новым н.о.п., с которым ассоциируются его отношение строгого предпочтения Q^S и множество недоминируемых альтернатив U_q^{nd}. Множества $U(R^s; nd)$ и U_q^{nd} несут дополняющую друг друга информацию о недоминируемости альтернатив.

3. Рассматривается пересечение полученных множеств $U(R^s; nd)$ и $U(Q, nd)$. $U^{nd}= U^{nd} \cap U_q^{nd}$ с функцией принадлежности $\mu^{nd}(u_i)=min\{\mu_P^{nd}(u_i), \mu_Q^{nd}(u_i)\}$.

4. Выбирается та альтернатива u^*, для которой значение $\mu^{nd}(u^*)$ максимально: $u^*=arg\ max\ \mu\mu^{nd}(u_i), u_i \in U$.

Пример.

На том же множестве U, что и в первом примере, пять экспертов задали отношения R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 матрицами M_1, M_2, M_3, M_4, M_5:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}2 & 0{,}9 \\ 1 & 1 & 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}7 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 1 & 0{,}9 \\ 0{,}5 & 0 & 1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 1 & 1 & 0{,}8 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}1 & 1 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}3 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Весовые коэффециенты относительной важности экспертов с точки зрения лица, принимающего решения:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0{,}2; \lambda_3 = 0{,}3; \lambda_5 = 0{,}1.$

Свертки P и Q отношений R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 определяются матрицами:

$$M_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; M_Q = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}34 & 0{,}49 & 0{,}62 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}67 & 0{,}71 \\ 0{,}45 & 0{,}45 & 1 & 0{,}39 \\ 0{,}6 & 0{,}45 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Множества P^S Q^S определяются матрицами

$$M_P{}^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M_Q{}^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}02 \\ 0{,}16 & 0 & 0{,}22 & 0{,}26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}11 & 0 \end{bmatrix}.$$

Множества U_P^{nd} U_Q^{nd} определяются векторами
$v_P^{nd}=[0{,}5;\ 1;\ 0{,}8;\ 0{,}5]$, $v_Q^{nd}=[0{,}84;\ 1;\ 0{,}78;\ 0{,}74]$,

откуда $\mu^{nd} = [0{,}5; 1; 0{,}78; 0{,}5] \Rightarrow u^* = u_2$.

4.3. Задача принятия решения с группой экспертов, характеризуемых нечетким отношением нестрого предпочтения между ними

При желании получить еще более объективное решение, можно рассмотреть задачу принятия решений с группой экспертов, характеризуемых не весовыми коэффициентами, а при помощи еще одного н.о.п. N, заданного на множестве E экспертов с функцией принадлежности $\mu_N(e_k, e_l)$, $e_k, e_l \in E$, значения которой означают степень предпочтения эксперта e_k по сравнению с экспертом e_l.

Алгоритм решения задачи

1. С каждым Rk ассоциируются Rk^S и Uk^{nd}, вводится обозначение $\mu k^{nd}(ui) = \mu_\Phi(ui, ek)$, $i=1,..,n$, $k=1,...,m$. Тем самым задается нечеткое соответствие Φ между множествами U и E.

2. Строится свертка Γ в виде композиции соответствий $\Gamma = \Phi^T N \Phi$. Причем результирующее отношение Γ определяется как максминное произведение матриц Φ^T, N, Φ. То есть, получается единое результирующее отношение, полученное с учетом информации об относительной важности н.о.п. Rk.

С отношением Γ ассоциируется отношение Γ^S и множество U_Γ^{nd}.

3. Корректируется множество U_Γ^{nd} до множества U'^{nd}_Γ с функцией принадлежности $\mu'^{nd}_\Gamma(ui) = min\{\mu_\Gamma^{nd}(ui), \mu_\Gamma(ui, ui)\}$.

4. Выбирается та альтернатива, для которой значение функции принадлежности скорректированного нечеткого подмножества U'^{nd}_Γ недоминируемых альтернатив максимально.

Пример.

Теперь вместо весовых коэффициентов относительной важности на множестве E экспертов задано отношение N матрицей

$$M_N = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 1 & 0,3 & 0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,5 & 1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,8 & 0,3 & 0,6 & 1 & 0,3 \\ 0,5 & 0,2 & 0,4 & 0,6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Построив для каждого отношения R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 функцию принадлежности $\mu_1^{nd}, \mu_2^{nd} \ldots \mu_5^{nd}$, формируем матрицу соответствия Φ.

$$M_\Phi = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 & 0,9 \\ 0 & 1 & 0,6 & 0 \\ 0,8 & 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Свертка Γ определяется максминным произведением матриц

$$M_\Gamma = (M_\Phi)^{\mathrm{T}} N M_\Phi = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0,8 & 0 & 0,6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0,6 & 0 & 1 & 0 \\ 0,9 & 0 & 0,5 & 0,7 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 1 & 0,3 & 0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,5 & 1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,8 & 0,3 & 0,6 & 1 & 0,3 \\ 0,5 & 0,2 & 0,4 & 0,6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 & 0,9 \\ 0 & 1 & 0,6 & 0 \\ 0,8 & 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,7 & 0,5 & 0,8 & 0,6 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 1 & 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 & 0,6 & 1 & 0,6 \\ 0,9 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 & 0,9 \\ 0 & 1 & 0,6 & 0 \\ 0,8 & 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 1 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}9 \end{bmatrix}.$$

Отношение Γ^S определяется матрицей

$$M_{\Gamma}{}^{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Множество U_Γ^{nd} определяется вектором

$v_{\Gamma}{}^{nd} = [0{,}9; 0{,}8; 1; 0{,}9]$,

а скорректированное множество $\widetilde{U}_{\Gamma}{}^{nd}$ - $\widetilde{v}_{\Gamma}{}^{nd} = [0{,}8; 0{,}8; 1; 0{,}9]$,

откуда $u^* = u_3$.

5. Метод анализа иерархий

При принятии управленческих решений и прогнозировании возможных результатов лицо, принимающее решение, обычно сталкивается со сложной системой взаимозависимых компонент (ресурсы, желаемые исходы или цели, лица или группа лиц и т.д.), которую нужно проанализировать. Метод анализа иерархий – МАИ (Analitic Hierarchy Process) сводит исследование даже очень сложных проблем к последовательности попарных сравнений их отдельных составляющих. МАИ – относительно новая теория, становление которой проходило в 70-ые годы в США. Теория МАИ широко применялась во многих областях экономики, промышленности, в планировании развития при непредвиденных обстоятельствах как отдельных предприятий, так и целых отраслей производства. Находит применение метод и во многих других приложениях: покупка автомобиля, дома, выбор работы, распределение энергии, капиталовложения в условиях неопределенности, борьба с терроризмом и т.д.

Принимая решение, группа экспертов производит декомпозицию сложной проблемы – определяет ее компоненты и отношения между ними. Получается модель реальной действительности, построенная в виде иерархии. Вершина иерархии – общая цель, далее располагаются подцели, затем силы, которые влияют на эти подцели, люди, их цели, политики, стратегии, и, наконец, исходы, являющиеся результатами стратегий. На следующем этапе решения сравниваются уже отдельные компоненты иерархии между собой. В результате может быть выражена относительная степень интенсивности взаимодействия элементов в иерархии. Затем эти суждения выражаются численно. В завершении анализа проблемы МАИ включает процедуры синтеза множественных суждений, получения приоритетности критериев и нахождения альтернативных решений. Таким образом, основные этапы принятия решения с помощью МАИ следующие:

– построение иерархии рассматриваемой проблемы,
– парное сравнение компонент иерархии,
– математическая обработка полученных суждений.

5.1. Математические основы МАИ

5.1.1. Иерархии и приоритеты

Иерархию можно рассматривать как специальный тип упорядоченных множеств или частный случай графа. Первая интерпретация выбрана в качестве основы формального определения, а вторая — в качестве иллюстрации.

Определение 1. Упорядоченным множеством называется множество S с бинарным отношением $\leq$, которое удовлетворяет законам рефлексивности, антисимметричности и транзнтивности:

Рефлексивность: для всех x, $x \leq x$.

Антисимметричность: если $x \leq y$ *и* $y \leq x$*, то* $x = y$.

Транзитивность: если $x \leq y$ *и* $y \leq z$*, то* $x \leq z$.

Для любого отношения $x \leq y$ (читается: x предшествует y) такого типа можно определить $x<y$, что означает $x \leq y$ и $x \neq y$.

Говорят, что y покрывает (доминирует) x, если $x<y$ и если $x<t<y$ невозможно ни для какого t.

Упорядоченные множества с конечным числом элементов могут быть удобно представлены направленным графом. Каждый элемент системы представлен вершиной так, что дуга направлена от a к b, если $b<a$.

Определение 2. Вполне упорядоченное множество – (также называемое цепью) есть упорядоченное множество со следующим дополнительным свойством: если $x, y \in S$, то или $x \leq y$ или $y \leq x$. (Т.е. в данном множестве нет повторяющихся элементов)

Определение 3. Подмножество E упорядоченного множества S называют ограниченным сверху, если существует элемент $s \in S$, что $x \leq s$ для любого $x \in E$. Элемент s называют верхней границей E.

Говорят, что E имеет супремум или наименьшую верхнюю границу в S, если E имеет верхние границы и у множества верхних границ U имеется элемент u_1 такой, что $u_1 \leq u$ для всех $u \in U$. Элемент u_1 – единственный и называется супремумом E в S.

Символ *sup* используется для обозначения супремума. Аналогичные определения могут быть даны для множеств, ограниченных снизу,– нижняя граница и инфимум. В этом случае используют символ *inf*.

Существует много способов определения иерархии. Остановимся лишь на одном из них.

Воспользуемся обозначением $x^- = \{y \mid x$ покрывает $y\}$ и $x^+ = \{y \mid y$ покрывает $x\}$ для любого элемента x в упорядоченном множестве.

Определение 4. Пусть H – конечное частично упорядоченное множество с наибольшим элементом b.

H есть *иерархия*, если выполняются следующие условия.

1. Существует разбиение H на подмножества L_k, $k=1,2...h$, где $L_1=\{b\}$.

2. Из $x \in L_k$ следует, что $x^- \subset L_{k+1}, k = 1,...,h-1$.

3. Из $x \in L_k$ следует, что $x^+ \subset L_{k-1}, k = 2,...,h$.

Для каждого $x \in H$ существует весовая функция (сущность ее зависит от явления, для которого строится иерархия)

$$w_x : x^- \to [0,1], \text{ где } \sum_{y \in x^-} w_x(y) = 1.$$

Множества L_k являются уровнями иерархии, а функция w_x есть функция приоритета элемента одного уровня относительно цели x. Заметим, что даже если $x^- \neq L_{k+1}$ (для некоторого уровня L_k), то w_x может быть определена для всех L_k, если приравнять ее к нулю для всех элементов в L_{k+1}, не принадлежащих x^-.

Пример 1. Рассмотрим иерархию H, построенную для задачи выбора руководителя из трех кандидатов (см. рис. 1, стр. 89). Элементами множества H в данном случае являются цель задачи и факторы, на нее влияющие, а также кандидаты на должность руководителя.

$H=\{$руководитель, организационные способности, профессионализм, личная активность, коммуникабельность, внимание к подчиненным, авторитет среди подчиненных, кандидат 1, кандидат 2, кандидат 3$\}$.

Для иерархии выполняются все условия определения 4.

1. Существует разбиение множества H на подмножества L_1, L_2, L_3 $(h=3)$, где $L_1=\{$Руководитель$\}$, $L_2=\{$организационные способности, профессионализм, личная активность, коммуникабельность, внимание к подчиненным, авторитет среди подчиненных$\}$, $L_3=\{$кандидат 1, кандидат 2, кандидат 3$\}$.

2. Рассмотрим x=Руководитель $\in L_1$, в этом случае $x^- = L_2$. (аналогичные выводы справедливы и для всех других x).

3. Рассмотрим x=кандидат 1 $\in L_3$, в этом случае $x^+ = L_2$. (аналогичные выводы справедливы и для всех других x).

Определим весовую функцию для элемента x=Руководитель. Эта функция ставит в соответствие качествам руководителя (элементам уровня L_2.) значения из отрезка $[0,\ 1]$ и определяет приорите этих качеств относительно цели – "Руководитель". Весовая функция задается субъективно экспертами. К примеру, она может быть такой

$w_{\text{руководитель}}$(орг. способ.)$=0,3$; $w_{\text{руководитель}}$(профес.)$=0,2$;
$w_{\text{руководитель}}$(личн.актив.)$=0,1$; $w_{\text{руководитель}}$(коммуникабельность)$=0,1$;
$w_{\text{руководитель}}$(внимание к под.)$=0,1$; $w_{\text{руководитель}}$(авторитет)$=0,2$.

Условие $\sum_{y \in x^-} w_x(y) = 1$ выполняется.

Определение 5. Иерархия называется *полной*, если для всех $x \in L_k$ множество $x^+ = L_{k-1}, k = 2, \dots, h$.

Так в предыдущих примерах обе иерархии являлись полными.

Основная задача. Как определить для любого заданного элемента $x \in L_\alpha$ и подмножества $S \subset L_\beta, (\alpha < \beta)$ функцию $w_{x,S}: S \to [0,1]$, чтобы она отражала свойства функций приоритетов w_x, на уровнях $L_k, k = \alpha, \dots, \beta - 1$. В частности, что это за функция $w_{b,L_h}: L_h \to [0,1]$.

Используя менее формальную терминологию, задачу можно переформулировать следующим образом.

Рассмотрим социальную (или экономическую) систему с главной целью b и множеством основных видов действий L_h. Пусть эту систему можно представить как иерархию с максимальным элементом b и нижним уровнем L_h. Каковы приоритеты элементов уровня L_h по отношению к b?

Изложим метод решения основной задачи. Предположим, что $Y = \{y_1, \dots, y_{mk}\} \subset L_k$, $X = \{x_1, \dots, x_{mk+1}\} \subset L_{k+1}$ (Заметим, что в соответствии с замечанием, следующим за определением 4, можно предположить, что Y=L_k, X=L_{k+1}.) Пусть также существует элемент $z \in L_{k-1}$, такой, что $y \in z^{-1}$. Рассмотрим функции приоритетов

$$w_z: Y \to [0,1],\ w_{y_j}: X \to [0,1],\ j = 1, \dots, n_k$$

Обозначив через $w, w\colon X \to [0,1]$ функцию приоритета элементов из X относительно z, зададим ее следующим образом:

$$w(x_i) = \sum_{j=1}^{n_k} w_{y_j}(x_i) w_z(y_j), i = 1,\ldots,n_{k+1}.$$

Очевидно, что это не что иное, как процесс взвешивания показателя влияния элемента y_i, на приоритет элемента x_i, путем умножения этого показателя на важность элемента y_i, относительно z.

Соответствующие алгоритмы упростятся, если из $w_{y_j}(x_i)$ образовать матрицу B, положив $b_{ij} = w_{y_j}(x_i)$. Если обозначить далее $W_i = w(x_i), W_j^{/} = w_z(y_i)$, то приведенная выше формула примет вид.

$$W_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} W_j^{/}, i = 1,\ldots,n_{k+1}.$$

В результате имеем окончательную формулу $W = BW^{/}$.

Композиция приоритетов включает взвешивание и суммирование. Это требует независимости критериев на каждом этапе, в противном случае один элемент может получить некоторый приоритет относительно некоторого признака и дополнительный приоритет, вызванный перекрыванием этого признака с другим признаком, что вызовет двойной учет. В простых терминах множество признаков или критериев называют независимым, если возможна взаимозаменяемость любой пары безотносительно влияния других. Иными словами, критерии независимы, если между ними нет взаимодействия.

5.1.2. Принцип иерархической композиции: аддитивность взвешивания

Задано два конечных множества S и T. Пусть S – множество независимых свойств и T – множество объектов, которые в качестве характеристик обладают этими свойствами. Предположим, что численный вес, приоритет, или индекс относительной важности, w_i ассоциируется с каждым $s_j \in S$, так что $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Пусть $w_{ij} \geq 0, j=1,\ldots,m$, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{m} w_{ij} = 1$, есть веса, ассоциируемые с $t_i \in T, i = 1,\ldots,m$, относительно s_j. Тогда выпуклая комбинация $wij,\ j=1,..,n$ - $\sum_{j=1}^{n} w_{ij} w_j, i = 1,\ldots,m$ представляет собой численный приоритет или относительную важность t_i относительно S. Заметим, что принцип распространяется на цепь множеств.

Замечание.

"Иерархическое измерение" есть процесс взвешивания "линейных" переменных, ассоциирующий каждый уровень с нелинейными коэффициентами, которые являются произведениями и суммами переменных, связанных с верхними уровнями.

Докажем, что порядковые предпочтения сохраняются при композиции.

Определение 6. Предположим, что для каждой подцели или вида деятельности e_j в L_k существует порядковая шкала o_j над видами деятельности e_α $(\alpha=1,...,n_{k+1})$ в L_{k+1}. Определим частичный порядок на множестве L_{k+1} следующим образом: $e_\alpha \geq e_\beta$ тогда и только тогда, если для $j=1,..., n_k$, $o_{\alpha j} \geq o_{\beta j}$.

Теорема 1. Пусть $(w_{1j},\ldots,\ w_{n_{k+1}j})$ – вектор приоритетов для L_{k+1} относительно e_j и предположим, что он сохраняет порядок $o_{\alpha j}$. Пусть W_1,...., $W_{n_{k+1}}$ – (составной) вектор приоритетов для L_{k+1}. Тогда из $e_\alpha \geq e_\beta$ следует, что $W_\alpha \geq W_\beta$. Таким образом, иерархическая композиция сохраняет порядковое предпочтение.

Теорема 2. Пусть H – полная иерархия с наибольшим элементом b и h уровнями. Пусть далее B_k – матрица приоритетов k-го уровня, $k=2,\ldots,h$. Если W' – вектор приоритетов p-го уровня относительно некоторого элемента z в $(p-1)$ - м уровне, то вектор приоритетов W q-го уровня ($p<q$) относительно z определяется как

$$W = B_q B_{q-1} \ldots B_{p+1} W'.$$

Таким образом, вектор приоритетов самого низкого уровня относительно элемента b $W = B_h B_{h-1} \ldots B_2 W'$.

Обычно L_1 состоит из единственного элемента, W' – просто скаляр; в противном случае W' – вектор.

Для полной иерархии справедливо следующее утверждение: приоритет элемента любого уровня равен сумме его приоритетов в каждом подмножестве сравнения, которым он принадлежит; иногда каждый из приоритетов взвешивается лишь частью элементов уровня, которые принадлежат данному подмножеству, и приоритетом подмножества. Получающееся множество приоритетов элементов этого уровня затем нормализуются посредством деления на сумму приоритетов элементов. Приоритет подмножества на уровне равен приоритету доминирующего элемента на следующем уровне.

5.1.3. Интерпритация приоритетов с помощью теории графов

Определение 7. Обозначим узлы направленного графа G через $1, 2, 3,\ldots, n$. С каждой направленной дугой x_{ij} от узла i до узла j ассоциируется неотрицательное число, $0 < q_{ij} < 1$, называемое *интенсивностью* дуги. (Петли и кратные дуги разрешены).

Определение 8. Маршрут в направленном графе есть чередующаяся последовательность узлов и дуг, при которой каждый узел является концом дуги, находящейся в последовательности непосредственно перед ним, и источником последующей за ним дуги. Обе концевые точки каждой дуги находятся в последовательности. *Длина* маршрута есть число дуг в последовательности. Маршрут длины k назывем "k-маршрутом".

Определение 9. Интенсивность маршрута длины k от узла i до узла j есть произведение интенсивностей дуг в маршруте.

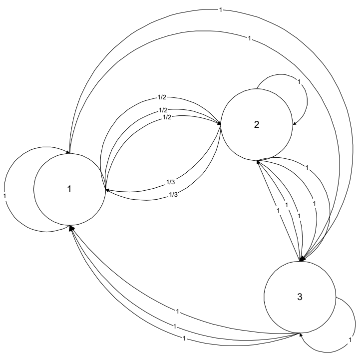
Определение 10. Общая интенсивность всех k-маршрутов от узла i до узла j есть сумма интенсивностей маршрутов.

Отметим, что для общей интенсивности 1-маршрутов (первых мартшрутов) берется сумма интенсивностей всех 1-маршрутов от i до j. Все интенсивности вдоль дуги i,j считаются равными. Поэтому общая интенсивность от i до j получается равной $t_{ij} = p_{ij} q_{ij}$, где p_{ij} – число дуг от i

до j, а q_{ij} интенсивность каждой дуги.

Определение 11. Для заданного направленного графа D матрица интенсивности-инцидентности $U=(u_{ij})$ определяется как матрица, элементами которой являются $u_{ij}=t_{ij}$ для всех i и j.

Пример 2. На рисунке число рядом с каждой дугой показывает ее интенсивность. Матрица интенсивности-инцидентности $U=(u_{ij})$, ассоциируемая с этим графом, будет $U=\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 2/3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Общая интенсивность 1-х маршрутов от i до j представлена (i,j)-м элементом этой матрицы.



Общая интенсивность маршрута длины 2 от узла 1 до узла 3 равна сумме следующих трех величин вместе с соответствующим маршрутом, изображенным справа:

$$3\left[(1/2\times 1)+(1/2\times 1)+(1/2\times 1)\right]: x_{12}, x_{23}$$
$$2(1\times 1) \quad : x_{11}, x_{13}$$
$$2(1\times 1) \quad : x_{13}, x_{33}$$

При этом каждая дуга между первыми двумя узлами берется по одному разу с каждой дугой между двумя вторыми узлами. Сумма этих величин равна $17/2$. Это есть элемент $(1,3)$ матрицы U^2. Таким образом можно показать, что для всех i и j общая интенсивность 2-маршрутов от узла i до узла j будет (i,j)-м элементом матрицы

$$U^2=\begin{bmatrix} 8 & 7 & 17/2 \\ 31/3 & 8 & 22/3 \\ 22/3 & 17/2 & 13 \end{bmatrix}.$$ Обобщим результат.

Теорема 3. $u_{ij}(k)-(i, j)$ -й элемент матрицы U^k является общей интенсивнотсью k-маршрутов от узла i до узла j.

Следствие. Если $q_{ij} = 1$ для всех i и j, то (i, j) -й элемент в U^k является числом k-маршрутов от i до j.

Для рассматриваемой проблемы важна обратная задача интерпретации степеней матрицы для подсчета интенсивности маршрутов.

Будем ассоциировать с каждым из n видов деятельности нашей процедуры парных сравненеий узел направленного графа D. В этом случае матрица интенсивности-инцидентности U есть не что иное, как матрица суждений. Числитель pij (i,j)-го элемента такой матрицы (полагая, что он дан в сравнительно простой дробной форме) представляет собой число дуг, направленных от вершины i к вершине j. Интенсивность каждой дуги от i до j одна и та же и равна обратной величине q_{ij} знаменателя элемента. Это естественный способ определения соответствующего графа, так как для $q_{ij} = 1$ он сводится к обычной матрице вершин, k-ая степень которой дает число маршрутов длины k.

Интерпретировать (i,j)-й элемент матрица A можно как прямое превосходство, или интенсивность важности вида деятельности i относительно вида деятельности j. Он выражает относительный вклад, который вид деятельности i вносит в достижение определенной цели по сравнению с вкладом, вносимым видом деятельности j. Нормализованные суммы строк матрицы A представляют собой уровень вклада соответствующих видов деятельности относительно всех других видов деятельности, а матрица A^2 – индекс оносительной важности превосходства с учетом всех 2-маршрутов. Последний обеспечивает косвенное сравнение пар через одну промежуточную вершину. Следовательно, уровень важности вида деятельности повышается или снижается в соответствии с его взаимосвязью с другими видами деятельности. В общем случае эффект превосходства между видами деятельности можно получить, вычисляя предельное значение суммы строк A^k матрица A k-ой степени. Каждое число, нормализованное посредством суммы этих величин, служит общим индексом превосходства, или приоритетом, среди видов деятельности.

Формальное понятие относительного превосходства вида деятельности i над видом деятельности j за k-шагов можно разъяснить в терминах общей интенсивности всех k-маршрутов от узла i до узла j. Относительное превосходство вида деятельности i над другим видом деятельности j прямо и косвенно, через промежуточные виды деятельности, за k-шагов представлен (i,j)-м элементом матрицы A^k. Из-за наличия петли на каждой вершине получается, что каждый вход матрицы A^k является суммой всех маршрутов длины, меньшей или равной k. Сколько раз включен каждый маршрут зависит от его длины и от числа престановок его петель при получении искомой длины маршрута. Петля сама по себе придает единичную интенсивность маршруту. Следовательно, общая интенсивность маршрута не меняется при прохождении вдоль петли несколько раз.

Теорема 4. Пусть $A=(a_{ij})$ – (nxm)-матрица сравнений; $a_{ij}(k)$ – (i,j)-й элемент матрицы A^k представляет собой относительное превосходство (или важность) вида деятельности i над видом деятельности j за k-шагов.

Определение 12. Индекс превосходства $w_i(k)$ вида деяетльности i над всеми другими видами деятельности за k-шагов определяется как $w_i(k) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k) / \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k)$. Таким образом, $w_i(k)$ – сумма i*-ой* строки A^k, деленная на сумму строк.

Определение 13. Общий индекс превосходства w_i вида деятельности i над всеми другими видами деятельности определяется как

$$w_i = \lim_{k\to\infty} w_i(k) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k) / \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k) \right).$$

Определение 14. Индекс приоритета, ассоциирумый с видом деятельности i, является общим индексом его превосходства w_i.

5.1.4. Положительные обратносимметричные матрицы и их собственные значения

Квадратные матрицы $A=(a_{ij})$, для которых $a_{ij}>0$, $i, j = 1,2 \ldots n$, $a_{ij}=1/ a_{ij}$, $i,j= 1,2 \ldots n$, будем называть положительными, обратносимметричными матрицами.

Положительные обратносимметричные матрицы $A=(a_{ij})$, для элементов которых выполняется соотношение $a_{ik}=a_{ij}a_{jk}$, $i,j,k = 1,2,\ldots,n$ являются согласованными.

5.1.5. Неприводимые матрицы

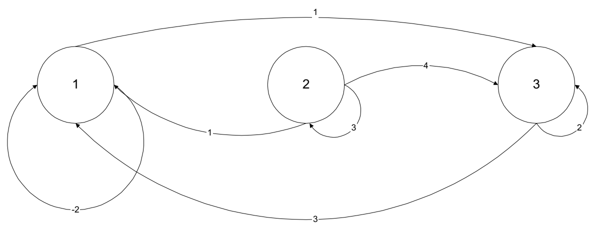
Обратносимметричные матрицы попарного сравнения не содержат нулей, следовательно они всегда неприводимы.

Определение 15. Квадратная матрица – неприводимая, если она не может быть представлена в виде $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$, где A_1 и A_3 – квадратные матрицы, 0 – нулевая матрица. В противном случае матрицу называют приводимой.

Пример 3. Матрица $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ приводима.

Граф, соответствующий этой матрице имеет дугу из первой в первую и третью вершины и аналогично из третьей в первую и третью вершины, но переход во вторую вершину невозможен. Со второй вершины можно перейти во все три вершины.

Таким образом, первая и третья вершины образуют неприводимую компоненту, а вторая связана с ними.



Заметим, что комплексная матрица A неприводима в том и только в том случае, если ее направленный граф $D(A)$ – сильно связный.

Теорема 5. Квадратная матрица или неприводима, или не может быть приведена путем перестановок индексов к виду:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k & 0 & \cdots & 0 \\ A_{k+1,1} & A_{k+1,2} & \cdots & A_{k+1,k} & A_{k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mk} & A_{m\,k+1} & \cdots & A_m \end{bmatrix}.$$

содержащему блок – диагональную матрицу с неприводимыми матрицами A_i на диагонали. При этом, по крайней мере, одна из матриц с двойным индексом в каждой строке, в которой они появляются – нулевая.

Теорема 6. (Перрон-Фробениус).

Пусть $A >= 0$ – неприводимая матрица. Тогда:

1. A имеет действительное положительной простое (т.е. не кратное) собственное значение λ_{max}, которое по модулю не меньше любого другого собственного значения матрицы A (некоторые из которых могут быть комплексными числами).

2. Собственный вектор A, соответствующий собственному значению λ_{max}, имеет положительные компоненты и, по существу (с точностью до постоянного множителя), единственен.

3. Число λ_{max} (иногда называемое *корнем Перрона* матрицы A) удовлетворяет условию

$$\lambda_{\max} = \max_{x \ge 0} \min_{1 \le i \le n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \min_{x \ge 0} \max_{1 \le i \le n} \frac{(Ax)_i}{x_i}; x \ge 0 \text{ – произвольно.}$$

Следствие. Пусть $A >= 0$ неприводима и пусть $x >= 0$ произвольно. Тогда корень Перрона удовлетворяет условию

$$\min_{1 \le i \le n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \le \lambda_{\max} \le \max_{1 \le i \le n} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

Доказательство теоремы Перррона опирается на следующие факты о положительных (nxn) матрицах:

Пусть A – положительная (nxn) матрица, λ_{max} – ее наибольшее собственное значение, тогда

1. λ_{max} ограничено сверху и снизу соответственно максимальной и минимальной строчными суммами матрицы A. Следовательно, если A – стохастическая матрица, т.е. если ее строчные суммы равны единице, то $\lambda_{max}=1$.

2. Для стохастической матрицы A, $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = ev$, где v – положительный вектор-строка, $v=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$, $e = (1,1,\ldots,1)^T$.

3. Для положительной матрицы A существует положительное число λ, нулевая вектор-строка v и ненулевой вектор-столбец w, такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{A^k}{\lambda^k} = wv$.

4. λ есть наибольшее собственное значение A и называется главным собственным значением, а w и v – главные собственные векторы, единственные с точностью до постоянного множителя.

5. w ортогонален всем не главным собственным векторам-столбцам, а v – всем не главным собственным векторам-строкам.

6. Если λ_i – наибольшее собственное значение A, причем $\lambda_i \neq \lambda_j; i \neq j, i, j = 1,2,\ldots,n$ и если w_i – правый собственный вектор, соответствующий λ_i, то $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{A^k e}{e^T A^k e} = cw_1$.

Теорема 7.

1. $$\left[\begin{array}{l} \min\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \le \lambda_{\max} \le \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}; \\ \min\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \le \lambda_{\max} \le \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}; \end{array}\right.$$

Неравенство имеет место, когда суммы не одинаковы.

2. $\lambda_{\max} = \lim\limits_{k\to\infty}\left[tr(A^k)\right]^{1/k}$.

3. $$\lambda_{\max} = \max_{u>0}\min_i \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j}{u_i} = \min_{u>0}\max_i \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j}{u_i}.$$

4. $$\lambda_{\max} = \max_{u>0}\min_j \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i}{u_j} = \min_{u>0}\max_j \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i}{u_j}.$$

Доказательство.

Компоненты вектора Ae представляют собой суммы строк матрицы A. Пусть наибольшая сумма строк есть M, а наименьшая – m. Тогда $me \le Ae \le Me$, а равенство имеет место только при $m=M$.

Из выражения $vA = \lambda_{\max} v$ имеем $vAe = \lambda_{\max} ve$, $vme \le \lambda_{\max} ve \le vMe$. Если теперь разделить неравенство на положительное число ve, то получим $m \le \lambda_{\max} \le M$, причем равенство вновь будет иметь место, если $m=M$. Аналогично для сумм столбцов.

Доказательство (2) получается либо из выражения

$$\lim_{k\to\infty}\left[tr 1/\lambda^k\ A^k\right]^{1/k} = 1 = 1/\lambda \lim_{k\to\infty}\left[trA^k\right]^{1/k},$$

либо из $\lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k = tr\ A^k$. Пусть во втором случае $\lambda_1 = \lambda_{\max}$, тогда $\lambda_1\left[1 + (\lambda_2/\lambda_1)^k + \ldots + (\lambda_n/\lambda_1)^k\right] = \left[tr\ A^k\right]^{1/k}$, при $k \to \infty$, $\lambda_1 \to tr\ A^k$. Остальная часть доказательства не приводится.

Теорема 8. Если A – положительная (nxn) - матрица, у которой сумма элементов каждой строки равна единице, то существует положительная вектор-строка v, $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$, такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = ev$, где $e=(1,1,...,1)^T$.

Доказательство. Пусть y_0 – любой n-мерный вектор-столбец. Определим $y_m = A^m y_0$ и пусть a_m и b_m – максимальная и минимальная компоненты y_m соответственно. Пусть a – минимальный элемент матрицы A. Так как $y_{m+1} = Ay_m$, любая компонента вектора y_{m+1} получается умножением строки A на y_m, и, следовательно, имеем следующие границы для произвольной компоненты с вектора y_{m+1}:

$$(1-\alpha)b_m + \alpha a_m \le c \le \alpha b_m + (1-\alpha)a_m.$$

Это неравенсто остается в силе для наибольшей и наименьшей компонент y_{m+1}, откуда

$a_{m+1} \le \alpha b_m + (1-\alpha)a_m$ (следовательно, a_m монотонно возрастает) и $(1-\alpha)b_m + \alpha a_m \le b_m + 1$ (следовательно b_m монотонно убывает), или

$$-b_{m+1} \le -(1-\alpha)b_m - \alpha a_m \text{ и } a_{m+1} - b_{m+1} < (1-2\alpha)(a_m - b_m).$$

Отсюда по индукции получаем

$a_m - b_m \le (1-2\alpha)^m (a_0 - b_0)$. Так как правая часть этого неравенства стремиться к нулю, то a_m и b_m сходятся к общему пределу, и, следовательно, все компоненты y_m приближаются к нему же, т.е. $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = Ce$ при $b_0 \le C \le a_0$ (равенство имеет место только при $a_0 = b_0$). Пусть $y_0 = \left(y_0^1, y_0^2, \ldots, y_0^n\right), y_0^i = 1, y_0^j = 0, j \ne i.$ Тогда y_m есть i-й столбец матрицы A^m, и , как уже установлено $y_m \to (c_i, \ldots c_i)^T$, причем $b_0 = 0,$ $c_i > b_0 = 0.$ Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = ev.$ Отметим, что поскольку каждая строчная сумма A^m равна единице, то $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Теорема 9. Если A – положительная (nxn) матрица, то $\lim \dfrac{A^k}{\lambda^k} = wv$, где λ – положительная постоянная, v – ненулевая вектор-строка, а w –

ненулевой вектор-столбец.

Краткое доказательство.

Пусть $S = \{x | x = (x_1, \ldots, x_n)^T, x_t \geq 0,\ i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, т.е. $fx=1\}$, где $f=(1,1,1\ldots,1)$.

Рассмотрим отображение $T_x = \left[\frac{1}{fA_x}\right] Ax, x \in S$. Это отображение положительно: так как $fx=1$, то x имеет ненулевую компоненту, и, следовательно, $Ax>0$ и $fAx>0$. Далее $fT_x = \left[\frac{1}{fA_x}\right] fAx = 1$, и поэтому T отображает S в S. Так как A непрерывна, по теореме Брауера о неподвижной точке найдется точка w, что

$\left[\frac{1}{fA_w}\right] A_w = w$. Поскольку левая часть положительна, w – положительна и $\lambda = fAw > 0$. Следовательно, $Aw=lw, l>0, w>0$. Наконец, пусть D – диагональная матрица $c\ d_{ij}=w_i\ u\ d_{ij}=0,\ i \neq j$. Так как $w>0,$ D имеет обратную матрицу D^{-1}, также диагональную, с диагональными элементами $1/w_i$, т.е. $w=De$ и

$$\left[D^{-1}(1/\lambda)AD\right]e = \left[D^{-1}(1/\lambda)A\right]w = D^{-1}w = e.$$

Отсюда следует, что суммы строк матрицы $\left[D^{-1}(1/\lambda)AD\right]$ равны единице, т.е. это матрица – стохастическая, и, исходя из предыдущей теоремы, найдется такая вектор-строка V^*, что

$ev^* = \lim_{k\to\infty}\left[D^{-1}(1/\lambda)AD\right]^k = \lim_{k\to\infty} D^{-1}(1/\lambda^k)A^k D$, (т.е. строки предельной матрицы все одинаковы), откуда непосредственно получаем $\lim_{k\to\infty}(1/\lambda^k)A^k = Dev^*D^{-1} = wv^*D^{-1} = wv$.

Теорема 10. v и w – собственные векторы матрица A, соответствующие собственному значению l.

Доказательство.

$$(1/\lambda)Awv = (1/\lambda)A\lim_{k\to\infty}(1/\lambda)^k A^k = \lim_{k\to\infty}(1/\lambda)^{k+1}A^{k+1} = wv$$

откуда имеем $Awv=\lambda wv$ и $Awve=\lambda wve$, и так как ve постоянная, то $Aw=\lambda w$. Аналогично $vA=\lambda v$.

Следствие. Векторы v и w положительны.

Доказательство.

Из равенства $Aw=\lambda w$ имеем $(1/l)Aw=w$. Так как λ, A – положительны, а w – неотрицателен (с некоторыми ненулевыми компонентами), все компоненты левой части равенства положительны, и, следовательно, w – положителен; аналогично для v.

Теорема 11. Все собственные векторы, соответствующие собственному значению λ, являются постоянными множителями w и v.

Доказательство. Если $Au=\lambda u$, то $A^k u = \lambda^k u$, а $(1/\lambda^k)A^k u = u$ для всех k. При $k\to\infty$ имеем $wvu=u$. Аналогично для векторов-строк.

Теорема 12. Модуль любого другого собственного значения h матрицы A удовлетворяет неравенству $|h|<l$.

Доказательство.

Если $Ah=hu$, то $A^k u=h^k u$, а $(1/\lambda)^k A^k u=(h/\lambda)^k u$. Переходя к пределу при $k\to\infty$, имеем

$wvu = \lim_{k\to\infty}\left[h/\lambda\right]^k u$, и предел в правой стороне должен существовать, что возможно только при $h=\lambda$ или $|h|<\lambda$, причем в последнем случае предел равен нулю. Собственное значение λ есть главное собственное значение матрицы A, которое обозначается λ_{max}, а v и w – главные собственные векторы матрицы A.

Следствие. Главный собственный вектор-строка (столбец) – $v(w)$ ортогонален ко всем не главным собственным векторам-столбцам (строкам) матрицы A.

Доказательство.

Рассмотрим равенство $wvu=0$ из доказательства предыдущей теоремы. Так как $w>0$, имеем $vu=0$, и, следовательно, v ортогонален вектору-столбцу u. Аналогичный аргумент можно использовать, чтобы показать ортогональность w ко всем не главным собственным векторам-строкам матрицы A.

Следствие. $vw=1$.

Доказательство. В условиях теоремы пусть $u=w$, тогда $h=\lambda$, $wvw=w$. Так как vw – число, получаем $vw=1$.

Замечаем, vw есть след матрицы wv, и, следовательно, этот след всегда равен единице.

Замечание. Система $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i=1,\ldots,n.$ где $a_{ij}\geq 0,\ d_{ij}>0$, имеет неотрицательное решение $x_j \geq 0, j=1,\ldots, n$, если

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, |A| > 0.$$

Теорема 13. Если A – неотрицательная неприводимая матрица, то значение λ_{max} возрастает с увеличением любого элемента a_{ij}.

Доказательство. Пусть A – неотрицательная матрица, определим $B(p)=pI\text{-}A$, где p – действительный параметр. Пусть M – множество всех p, для которых существует и не отрицательна обратная матрица $(pI\text{-}A)^{-1}$. Множество M непусто для $x>0$ и остается таким для сравнительно большого p, $px>Ax$, т.е. $px\text{-}Ax>0$, и это условие обеспечивает существование неотрицательного решения и эквивалентно вышеописанному условию на главные миноры. Так как M зависит от A, обозначим его $M(A)$.

Пусть A – неотрицательная матрица, определим $B(r)=rI\text{-}A$, где r – действительный параметр. Пусть M – множество всех r, для которых существует не отрицательная квадратная матрица $(rI\text{-}A)^{-1}$. Множество M непусто для $x>0$ и остается таким для сравнительно большого r, $rx>Ax$, т.е. $rx - Ax>0$, и это условие обеспечивает существование неотрицательного решения и эквивалентно вышеописанному условию на главные миноры. Так как M зависит от A, обозначим его $M(A)$.

Пусть $A^{/}>=A^{//}>=0$. Тогда $M(A^{/})M\ M(A^{//})$. В самом деле, заметим, что если $r\in M(A')$, то $(rI- A')x>0$ для некоторого $x>0$ и так как $rI-A' >=rI- A'$, $(rI-A'')x>0$ для того же самого x, и, следовательно, $r\in M(A'')$. Теперь максимальное собственное значение λ_{max} матрицы $A>0$ есть $\inf_{\rho\in M(A)}\rho$, для которого $(rI- A')^{-1}$ существует, т.е. это первое значение, для которого $|rI-A'|=0$, ибо все другие собственные значения не превосходят λ_{max}. Поэтому

$$\lambda_{max}(A')=\inf_{\rho\in M(A)}\rho \geq \inf_{\rho\in M(A'')}\rho =\lambda_{max}(A'').$$

Следовательно, λ_{max} – монотонная функция A.

Ниже показан важный результат, который заключается в том, что собственный вектор, соответствующий λ_{max}, представляет собой нормализованные суммы элементов строк предельной матрицы в точности k-й степени A^k матрицы A (а не суммы всех степеней A).

Теорема 14.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{e^T A^k e} = cw_1,$$

где $A>0$, w_1 – главный собственный вектор, сответствующий максимальному собственному значению λ_1, $\lambda_i\neq\lambda_j$ для всех i и j, w_i – правый собственный вектор, соответствующий λ_i, а c – постоянная.

Доказательство

$e=a_1w_1+\ldots+a_nw_n$, где a_i, $i=1,\ldots,n$ – постоянные.

$$A^k e = a_1\lambda_1{}^k w_1+\ldots+a_n\lambda_n{}^k w_n = \lambda_1{}^k\left[a_1w_1 + a_2(\lambda_2/\lambda_1)^k w_2+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+a_n(\lambda_n/\lambda_1)^k w_n\right],$$

$$e^T A^k e = \lambda_1{}^k\left[b_1 + b_2(\lambda_2/\lambda_1)^k+\ldots+b_n(\lambda_n/\lambda_1)^k\right];\ b_i = a_i e^T w_i.$$

Так как $w_1>0$, $b\neq0$, что и требовалось доказать.

Обобщим эту теорему.

Неотрицательная неприводимая матрица А примитивна тогда и только тогда, когда существует целое $m\geq1$, такое, что $A^m>0$. В противном случае матрицу называют импримитивной. Граф примитивной матрицы имеет длину пути между любыми двумя вершинами $\geq m$.

Известно, что неотрицательная неприводимая матрица A примитивна тогда и только тогда, когда A имеет единственный характеристический корень с максимальным модулем, и этот корень имеет кратность, равную единице.

Теорема 15. Для примитивной матрицы A

$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{A^k e}{\left\|A^k\right\|}=cw, \left\|A^k\right\|=e^T A^k e$, где c – постоянная, а w – собственный вектор, соответствующий $\lambda_{max}\equiv\lambda_1$.

Доказательство.

Допустим $A>0$. Рассмотрим жорданову каноническую форму B матрицы A. Тогда для некоторой невырожденной матрицы N

$$NAN^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & B_2 & \\ \dots & & \dots\\ 0 & & B_r\end{bmatrix}=B,$$

где B_i, $i=2, \dots, r$ есть $m_i x\, m_i$ жорданова блочная форма, которая имеет вид

$$B_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & & & & & & \\ 1 & & & & & 0 & \\ & \lambda_i & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & .. & .. & .. & ..\\ 0 & & & & & \lambda_i & \\ & & & & & 1 & \lambda_i\end{bmatrix},$$

где $l_2, \dots, l_r$ – различные собственные значения с кратностями m_2, m_r соответственно, а $1+\sum\limits_{i=2}^{r}m_i=n$ – размерность матрицы A. Выбираем соответствующие базисные векторы для каждого подпространства жордановой формы

$$V_1$$
$$V_{21}, V_{22}, \ldots, V_{2m_2}$$
$$V_{31}, V_{32}, \ldots, V_{3m_3}$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$V_{r1}, V_{r2}, \ldots, V_{rm_r}$$

Отметим, что $B_i = \lambda_i I + u$,

$$u = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и $B_i^k = \lambda_i^k I + \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} u + \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} u^2 + \ldots + u^k$, где u^k – нулевая матрица, если $k >= n$, а если $k < n$ – диагональ единиц в u, сдвинутая вниз на каждую дополнительную степень u.

Например,

$$u^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Теперь пусть

$$e = a_1 V_1 + a_{21} V_{21} + a_{22} V_{22} + \ldots + a_{2m_2} V_{2m_2} + a_{31} V_{31} + \ldots + a_{rm_r} V_{rm_r},$$

$$\lambda A^k e = a_1 \lambda_1{}^k V_1 + \sum_{i=2}^{r} \sum_{j=1}^{m_r} \sum_{l=0}^{j} a_{ij} \left[\frac{k}{j-l} \right] \lambda_i^{k-l} V_{ij},$$

$$\left\| A^k \right\| = c_1 \lambda_1^k + p_{2,k} \lambda_2^k + p_{2,k-1} \lambda_2^{k-1} + \ldots + p_{2,1} \lambda_2 + \ldots + p_{rk} \lambda_r^k + \ldots + p_{r1} \lambda_r + c_2$$

где p_{ij} – полиномы от k а c_1, c_2 – постоянные, не зависимые от k.

Выражение $\dfrac{A^k e}{\left\| A^k \right\|}$ будет иметь член

$$\frac{a_1 \lambda_1^k V_1}{c_1 \lambda_1^k + p_{2,k} \lambda_2^k + p_{2,k-1} \lambda_2^{k-1} + \ldots + c_2}$$, предел которого при $k \to \infty$

будет $(a_1/c_1) V_1$, так как λ_1 – единственное наибольшее собственное значение.

Типичный член $(i>=2)$ $\dfrac{a_{il} \left[\dfrac{k}{j-l} \right] \lambda_i^{k-l} V_{ij}}{c_1 \lambda_1^k + \ldots + p_{ik} \lambda_i^k + \ldots + c_2}$ будет стремиться к нулю при $k \to \infty$ (так как λ_1 превосходит все другие λ). Полагая $e = (a_1 / c_1), V_1 = w$, получаем теорему для $A>0$.

Замечание. Отметим, что $c_1=0$ в том и только в том случае, если $a_1=0$. Можно показать, что $a_1\# 0$, исходя из того, что все a_{ij} в разложении e и все Vi действительны и положительны. Малое возмущение e составляет $a_1\# 0$, а результат при этом останется тем же самым.

Теперь для доказательства теоремы при $A \geq 0$ отметим, что из-за $a_{ij}>0$ существует такое положительное целое m, что $A^m>0$ (т.е. при движении по петлям в конечном счете возможно получение пути любой желаемой длины между произвольной парой вершин соответствующего графа). Приведенное выше доказательство применимо к A^m и его наибольшему собственному вектору $w(A^m)$. Действительно, так как A – ограниченный линейный оператор (и поэтому непрерывный), имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^{mk+i}}{\left\| A^{mk+i} \right\|} = cw(A^m), 0 \le i < m.$$

Легко убедиться, что $w(A^m)$ есть искомый неотрицательный собственный вектор.

Замечание. Следующая неотрицательная матрица неприводима (ее граф сильно связный, так как у любой пары вершин имеется путь, связывающий их):

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Эта матрица не удовлетворяет условиям теоремы, поскольку она импримитивна, имея 2 как единственное собственное значение кратности 3. Для пояснения этого отметим следующее:

$Ae = (2,4,1)^T$; нормализацией получаем

$x_1 = (2/7, 4/7, 1/7)^T$; $Ax_1 = (8/7, 4/7, 2/7)^T$; нормализацией получаем $x_2 = (4/7, 2/7, 1/7)^T$; $Ax_2 = (4/7, 4/7, 4/7)^T$; нормализацией получаем $x_3 = (1/3, 1/3, 1/3)^T$;

$Ax_3 = (2/3, 4/3, 1/3)^T$ и нормализацией получаем

$x_4 = (2/7, 4/7, 1/7)^T$, что то же самое, что и x_1 с зацикливанием вместо сходимости.

5.1.6. Вычисление главного собственного вектора

Вычисление главного собственного вектора основано на использовании теоремы 15. Она утверждает, что нормализованные строчные суммы степеней примитивной матрицы (и, следовательно, положительной матрицы) в пределе дают искомый собственный вектор. Поэтому краткий вычислительный способ получения данного вектора – возводить матрицу в степени, каждая из которых представляет собой квадрат предыдущей. Строчный суммы вычисляются и нормализуются. Вычисления прекращаются, когда разность между этими суммами в двух последовательных вычислениях меньше заранее заданной величины.

5.1.7. Согласованность

Обратносимметричные неотрицательные матрицы могут иметь комплексные собственные значения. Следовательно, они не допускают просто общей характеристики. Однако поскольку максимальное собственное значение лежит между наибольшей и наименьшей из строчных сумм, согласованная матрица имеет собственное значение, равное сумме любого из ее столбцов. Малое возмущение не сильно меняет максимальное собственное значение и остальные собственные значения находятся в окрестности нуля, причем их сумма – действительное число.

Выбор возмущения, наиболее соответствующего описанию влияния несогласованности на вычисляемый собственный вектор, зависит от психологического процесса, имеющего место при заполнении матрицы попарных сравнений исходных данных. Предположим, что все возмущения, заслуживающие внимания, могут быть сведены к общему виду $a_{ij} = (w_i / w_j)\varepsilon_{ij}$. Согласованность имеет место, если $\varepsilon_{ij} = 1$. Например, $(w_i / w_j) + \alpha_{ij} = (w_i / w_j)\left[1 + (w_i / w_j)\alpha_{ij}\right]$.

Теперь получим некоторые элементарные, однако существенные результаты для согласованных матриц. Начнем с выражения

$\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(w_j / w_i)$, которое является i-ой компонентой

$Aw = \lambda_{\max} w$, и определим $\mu = -\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\lambda_i$.

Тогда из $\sum_{i=2}^{n}\lambda_i = n$ следует, что

$\mu = (\lambda_{\max} - n)/(n-1); \lambda_{\max} \equiv \lambda_1$, и так как

$\lambda_{\max} - 1 = \sum_{j \neq i} a_{ij}(w_j / w_i)$, находим, что

$n\lambda_{\max} - n = \sum_{1 \le i < j \le n}\left[a_{ij}(w_j / w_i) + a_{ji}(w_i / w_j)\right]$, поэтому

$$\mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{n}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \le i < j \le n} \left[a_{ij}(w_j / w_i) + a_{ji}(w_i / w_{j.}) \right]$$

Подставляя $a_{ij} = (w_i / w_j)\varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{ij} > 0$, приходим к уравнению

$$\mu = -1 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \le i < j \le n} \left[\varepsilon_{ij} + (1/\varepsilon_{ij}) \right].$$

Заметим, что при $\varepsilon_{ij} \to 1$, т.е. при достижении согласованности, $\mu \to 0$. Кроме того, μ выпукла по ε_{ij}, поскольку $\varepsilon_{ij} + (1/\varepsilon_{ij})$ выпукло (и имеет минимум при $\varepsilon_{ij} = 1$) и сумма выпуклых функций выпукла. Поэтому μ мало или велико в зависимости от того, близка или далека величина ε_{ij} от единицы соответственно (т.е. близки или далеки мы от согласованности). Наконец, если напишем $\varepsilon_{ij} = 1 + \delta_{ij}$, то при $\delta_{ij} > -1$ имеем

$$\mu = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \le i < j \le n} \left[\delta^2{}_{ij} - \frac{\delta^3{}_{ij}}{1 + \delta_{ij}} \right].$$

Теорема 16. $\lambda_{\max} \ge n$.

Доказательство.

$$(\lambda_{\max} - n)/(n-1) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \le i < j \le n} \left[\frac{\delta^2{}_{ij}}{1 + \delta_{ij}} \right],$$ что ≥ 0, так как

$\alpha_{ij} = (w_i / w_j)(1 + 1 + \delta_{ij})$ при $\delta_{ij} > -1$.

Теорема 17. Положительная обратносимметричная матрица согласована тогда и только тогда, когда $\lambda_{\max} = n$.

Доказательство. Если A согласованна, то $\delta_{ij} = 0$ и $\lambda_{\max} = n$. Наоборот, используя полученный выше результат, отмечаем, что $\lambda_{\max} = n$,

$\delta_{ij} = 0$ при любом выборе i и j, следовательно, матрица A – согласованна.

Таким образом, для достижения согласованности желательно, чтобы μ было близко к нулю, или, что то же самое, $\lambda_{\max}$ было близко к своей нижней границе n. Интересно отметить, что $(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$ можно интерпретировать в терминах статистической среднеквадратичной ошибки. Действительно, допустим, что $\left|\delta_{ij}\right| < 1$ (и, следовательно, $\frac{\delta^3{}_{ij}}{1+\delta_{ij}}$ мало по сравнению с $\delta^2{}_{ij}$). Это разумное допущение для "несмещенного" суждения, которое ограничено "естественной" наибольшей нижней границей – 1 для δ_{ij} (так как a_{ij} должно быть больше нуля) и будет стремиться к симметрической оценке около нуля в интервале (–1;1). Теперь $\mu \to 0$ при $\delta_{ij} \to 0$. Умножение на 2 дает дисперсию δ_{ij}. Поэтому 2μ и есть эта дисперсия.

Малые возмущения элементов положительной обратносимметричной матрицы вызывают малые возмущения в собственных значениях от исходной величины. Вообще говоря, это неверно для положительных матриц. Докажем этот факт для $\lambda_{\max}$.

Теорема 18. Пусть $\delta = \max\limits_{i,j} \delta_{ij}$, тогда

$$\lambda_{\max} - n < \frac{1}{n} \sum_{1 \le i < j \le n} \delta^2{}_{ij} \le \frac{n-1}{2} \delta^2 .$$

Доказательство очевидно.

Таким образом, если возмущение (или ошибка в суждении) мало, и число сравниваемых элементов также мало (например, менее десяти), то отклонение $\lambda_{\max}$ от n также мало. Отметим, что для того, чтобы остаться вблизи согласованности, нужно, чтобы n было мало. Например $\delta = 0,1$; $n=7$ дает $\lambda_{\max} - n < 0,04$, а $\delta = 0,9$; $n=7$ дает $\lambda_{\max} - n < 2,43$.

Замечание. Неотрицательная матрица $A=(a_{ij})$ с $a_{i,i+1}=1$ и $a_{i,j}=0$ – для остальных i, j имеет все собственные значения равными нулю, но та же самая матрица с a_{n1}, замененным на ε, где $\varepsilon > 0$ мало, имеет максимальное собственное значение $\lambda_{\max} = \varepsilon^{1/n}$, которое стремится к единице при увеличении n. Поэтому, хотя $\lambda_{\max}$ изменяется непрерывно с коэффициентом ε, ее величина становится большой даже для самых малых ε.

Используя свойство обратной симметричности $a_{ij} = 1/a_{ji}$ из равенства $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$, имеем $a_{ij}a_{jk}a_{ki} = 1$. Следовательно, согласованность для обратносимметричной матрицы значит, что все контуры длины три имеют единичную интенсивность.

Предполагая $|\delta_{ij}| < 1$ и рассматривая треугольные контуры, находим

$a_{ij}a_{jk}a_{ki} = (1+\delta_{ij})(1+\delta_{jk})(1-\delta_{ik}) \approx 1+\delta_{ij}+\delta_{jk}-\delta_{ik}$, и, поскольку $\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}$, имеем $\sum_{i,j,k} a_{ij}a_{jk}a_{ki} = n^2\lambda_{\max}$.

Для $i \neq j, j \neq k, i \neq k$ эта сумма становится равной $n^2(\lambda_{\max} - n) + n(n-1)(n-2)$, так как, подставляя $a_{pp} = 1$, $a_{pq} = a_{qp}$, имеем $n^2 + 2n(n-1)$ членов, величина которых равна единице. Усредняя по количеству членов, т.е. $n(n-1)(n-2)$, в результате получаем $[n/(n-2)](\lambda_{\max} - n)/(n-1) + 1$, что справедливо при $n \geq 3$. В любом случае предметом нашего внимания является разность $\lambda_{\max} - n$.

Теперь проверим гипотезу о согласованности. Полная согласованность может быть сформулирована в виде нулевой гипотезы:

$H_0 \colon \mu = 0$, и мы проверяем ее по отношению к односторонней альтернативе $H_1 \colon \mu > 0$. Соответствующая тестовая статистика будет

$m = \dfrac{\widetilde{\lambda}_{\max} - n}{n-1}$, где $\widetilde{\lambda}_{\max}$ – максимальное наблюдаемое собственное значение матрицы, элементы которой a_{ij} содержат случайную ошибку. Установление статистической меры для согласованности требует нахождения распределения статистики m. Несмотря на то, что ее специфическая форма выходит за рамки материала этой глав, заметим, что m соответствует неотрицательному вероятностному распределению, дисперсия которого есть удвоенное среднее x, и представляется совершенно аналогичным распределению χ^2, если предположить, что все δ_{ij} есть $N(0, \delta)^2$ на интервале $(-1,1)$.

Для нашей цели при неизвестном распределении используем общепринятое отношение $(\bar{x} - \mu_0)/\sqrt{2x}$, $\mu_0 = 0$, т.е. используем $\sqrt{x/2}$ в качественном тесте для подтверждения нулевой гипотезы, когда тестовая статистика, допустим ≤ 1. Поэтому при $x>2$, можно измерять несогласованность.

Более подходящий метод проверки статистики m заключается в используемом нами сравнении *ИС* с *СИ*.

Замечание. Заметим, что для матриц $A = (a_{ij})$, $W = (w_i / w_j)$ имеем

$$(A - W)w = (\lambda_{\max} - n)w$$, откуда видно, что аппроксимация (a_{ij}) посредством (w_i / w_j) лучше, чем ближе $\lambda_{\max}$ к n. Возвращаясь к представлению

$$a_{ij} = w_j / w_i + (w_i / w_j)\delta_{ij}$$, находим, что

$\delta^2{}_{ij} = \left[a_{ij}(w_i / w_j) - 1\right]^2$. Таким образом, заменив a_{ij} на w_i / w_j, получим $\delta^2{}_{ij} = 0$, сведя тем самым к нулю величину

$$2(\lambda_{\max} - n)/(n-1).$$

Следовательно, всякий раз, когда $\left|\delta_{ij}\right| < 1$, аппроксимация любого

a_{ij} величиной w_i / w_j приближает нас к согласованности.

Теорема 19. Если положительная матрица A согласованна, то каждая строка является положительным кратным любой данной строки.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что каждая строка является положительным множителем i-ой строки. Из отношения $a_{jk} = a_{ik} / a_{ij}$ следует, что, зафиксировав j и положив $k=1, 2, ..., n, j$ - я строка будет равна i-й строке, умноженной на положительную постоянную $(1/a_{ij})$.

Замечание. Очевидно, что обратное утверждение теоремы неверно. Матрица единичного ранга может и не быть согласованной. Например, в матрице

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ элемент a_{21} не равен a_{11} / a_{12}.

Таким образом, согласованная матрица при $a_{ii} = 1$ принимает следующий общий вид:

$$\begin{bmatrix} a_{i1}/a_{i1} & a_{i2}/a_{i1} & \dots & a_{in}/a_{i1} \\ a_{i1}/a_{i2} & a_{i2}/a_{i2} & \dots & a_{in}/a_{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}/a_{ij} & \dots & \dots & a_{in}/a_{ij} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}/a_{in} & a_{i2}/a_{in} & \dots & a_{in}/a_{in} \end{bmatrix}.$$

Так как матрица $A = (w_i / w_j)$ имеет вид транспонированной по отношению к приведенной матрице, она согласованна.

Теорема 20. Если A – положительная и согласованная матрица, то $a_{ij} = 1/a_{ji}$, $a_{ii} = 1$.

Доказательство. Из определения следует, что $a_{ii} = a_{ii}a_{ii}$ и, следовательно, $a_{ii} = 1$ для всех i. Также из $a_{ii} = a_{ij}a_{ji}$ следует, что

$a_{ij} = a_{ii} / a_{ji} = 1 / a_{ji}$.

Теорема 21. Положительная матрица A согласованна в том и только в том случае, если она единичного ранга и элементы ее главной диагонали равны единице.

Доказательство. Если A согласованная, то $a_{ii} = 1$.Также $a_{ij} = a_{1j} / a_{1i} = (1 / a_{i1}) a_{1j}$ и i-я строка есть первая строка, умноженная на $(1/ a_{1i})$, и, следовательно, ранг A равен единице. Наоборот, если ранг A равен единице и $a_{ii} = 1$ для всех i, то каждая строка является кратной первой строке, т.е.

$$a_{ij} = c_i a_{1j}\ , \ a_{jk} = c_j a_{1k}\ , \ a_{ik} = c_i a_{1k}\ , \ a_{ij} = c_j a_{1j}\ ,$$

$$a_{ij} a_{jk} = c_i c_j a_{1j} a_{1k} = c_i c_j a_{1j} (a_{1k} / c_i) = c_j a_{1j} a_{ik} = a_{jj} a_{ik} = a_{ik}\ ,$$

и матрица A согласованна.

Рассмотрим иллюстрацию понятия согласованности на языке теории графов.

Определение 15. Интенсивность суждений, относящихся к пути из i в j (называемая интенсивностью пути), равна произведению интенсивностей, соответствующих дугам этого пути.

Напомним, что перекрывающееся дерево с n вершинами имеет $n\text{-}1$ ребер. Оно является связным графом, включающим все вершины и не имеющим контуров. Поэтому имеется единственный путь между любой парой вершин.

Теорема 22. Необходимым и достаточным условием существования единственной положительной согласованной матрицы является то, что объекты (как вершины) и соединяющие их суждения (как дуги) формируют перекрывающееся дерево.

Доказательство. Необходимость. Если объекты формируют контур, то имеется не единственный путь между двумя вершинами в контуре, что дает два различных значения для одного и того же элемента. Все объекты должны образовывать дерево, иначе суждения для связывания изолированных объектов были бы произвольными, что нарушило бы единственность матрицы.

Достаточность. Для каждой дуги перекрывающего дерева мы используем интенсивность вдоль единственного пути для получения интенсивностей между объектами i и j. Это определяет матрицу $A=(a_{ij})$.

Для доказательства согласованности матрицы A рассмотрим любую строку, например, i-ю. Для любой пары вершин j и k нужно показать, что a_{jk}, определенная произведением дуг на пути jk, дана величиной a_{ik}/a_{ij}, где a_{ik}, a_{ij} – соответствующие произведения интенсивностей дуг на путях, соединяющих i с k и i с j.

Рассмотрим два случая:

1. i лежит на пути между j и k. В этом случае $a_{jk} = a_{ji}a_{ik} = a_{ik}/a_{ij}$.

2. i не лежит между j и k, тогда:

а) i, j, k образуют путь; в этом случае путь, определяющий a_{jk}, дается величиной a_{ik}/a_{ij}, если j находится между i и k, и обратной величиной a_{ij}/a_{ik}, т.е. a_{ik}/a_{ij}, если k находится между i и j, так как путь должен проходить от j к k, а не от k к j;

б) i, j, k образуют вилку в m.

Тогда $a_{jk} = a_{im}a_{mk} = a_{jm}a_{mi}a_{im}a_{mk} = a_{ji}a_{ik} = a_{ik}/a_{ij}$.

Теорема 23. Если A – согласованная матрица,

то $A^k = n^{k-1}A$.

Доказательство.

Из теоремы Сильвестра имеем

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\frac{\prod_{i\neq j}(A-\lambda_i I)}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j)}.$$

Эта формула справедлива и для случая $f(A) = A^k$ (для кратных собственных значений), когда кратное собственное значение равно нулю. Подставляя сначала $f(A)=A$, а затем $f(A) = A^k$, в обоих случая при $\lambda_i = n, \lambda_j = 0, j \neq 1$, получаем

$A^{n-1} = n^{n-2}A,\ A^k = n^{k-n-1}A^{n-1}$ соответственно. Подстановка

A^{n-1} из первого результата во второй дает $A^k = n^{k-1}A$.

Теорема 24. Любой столбец матрицы $A = (w_i / w_j)$ является решением задачи о собственном значении $Aw=nw$, $w = (w_1, \dots, w_n)$ /

Доказательство. Так как любой столбец матрицы имеем вид $\left[w_1 / w_j, w_2 / w_j, \dots, w_n / w_j\right]^T$, то он является просто кратным w и, следовательно, решением задачи.

Из последней теоремы получается предыдущая теорема, так как если обозначить столбцы A через $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то $\mathrm{A} \cdot \mathrm{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = (na_1, na_2, \dots, na_n) = nA$.

Теорема 25. Любая строка матрицы $A = (w_i / w_j)$ есть решение задачи $vA=nv$.

Доказательство очевидно.

Следствие. Компоненты правого и левого собственных вектора, w и v, являются обратными величинами с точностью до постоянного множителя. (Будем называть их двойственными векторами).

Определим норму матрицы A как $\|A\| = e^T Ae$ (т.е. она является суммой всех элементов A).

Как известно, для примитивной матрицы A

$\lim\limits_{k\to\infty}\left(A^k e / \left\|A^k\right\|\right) = cw_{\max}$, где c – постоянная, $w_{\max}$ – нормализованный главный собственный вектор A. Следующая теорема является упрощенной версией этой теоремы для согласованных матриц.

Теорема 26. Если A положительная согласованная (nxn)-матрица, $Ae=Cw$, где $C>0$ постоянная и w удовлетворяет равенству $Aw=nw$.

Доказательство. Вектор Ae является суммой строк A и, очевидно постоянным множителем любого столбца. Поэтому он является решением задачи о собственном значении.

Другой вариант доказательства. Легко показать, что A имеет единичный ранг тогда и только тогда, когда существуют векторы x и y, такие, что $A = xy^T$. Отсюда

$$Aw = (y,w)x = nw, \quad (y,w) = y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n$$, и следовательно,

$$Ae = (y,e)x = (y,e)\frac{n}{(y,w)} = Cw.$$

Следствие 1. Если $A = (w_i / w_j)$, то $Cw_i = w_i / \sum_{i=1}^{n} w_i$.

Следствие 2.

$$\frac{A^k e}{e^T A^k e} = \frac{n^{k-1} Ae}{n^{k-1} e^T Ae} = \frac{Ae}{e^T Ae} = C(w_1, \ldots, w_n),\ C > 0$$

Следующая теорема показывает, что в случае согласованных матриц компоненты собственного вектора изменяются монотонно с изменениями отдельных элементов.

Теорема 27. (О монотонности). Пусть $A = (a_{ij})$ – положительная согласованная матрица с главным собственным вектором $w = (w_1, \ldots, w_n)$. Заменим один элемент a_{xy} на $a_{xy} + \varepsilon > 0$ и, используя строку x, построим новую согласованную матрицу $A^* = (a^*_{ij})$. Пусть $w^* = (w^*_1, \ldots, w^*_n)$ – главный собственный вектор матрицы A^*. Тогда $w_x^* > w_x$.

Доказательство. Так как и A, и A^* согласованны, любой нормализованный столбец дает главный собственный вектор. Рассмотрим столбец, содержащий $1 / a_{xy}$ в матрице А, и соответствующий столбец, содержащий $1/(a_{xy} + \varepsilon)$ в матрице A^*. Два столбца идентичны за исключением этого единственного элемента. Сумма элементов столбца в A^* меньше, чем сумма элементов столбца в A. Поэтому, нормализуя данный столбец, получаем большее отношение для всех тех элементов, которые не меняются в обеих матрицах. В частности, это верно для w_x^*, поэтому $w_x^* > w_x$.

Теорема 28. Если A – положительная согласованная матрица и $A^{/}$ получена из A вычеркиванием i-й строки и i-го столбца, то $A^{/}$ – согласованна и ее соответствующий собственный вектор получается из A, если положить $w_i = 0$ и нормализовать компоненты.

Доказательство. Для любой заданной строки A, например, для первой, имеем $a_{ji} = a_{1i} / a_{1j}$,*j*=*1*, ..., n, и i-я строка A зависит от элемента i-го столбца в его первой строке. Аналогичное следует из $a_{jk} = a_{1k} / a_{1j}$. Поэтому ни один элемент в $A^{/}$ не зависит от i-й строки или i-го столбца A и, следовательно, $A^{/}$ также согласованна. Так как их элементы совпадают за исключением i-й строки или i-го столбца A и решение задачи о собственном значении при согласованной матрице получается из любого нормализованного столбца, получаем утверждение теоремы.

Замечание. В общем случае, если $A = (a_{ij})$ – матрица парных сравнений, а $A^{/} = (a'_{ij})$ при

$a'_{ij} = a_{ij}, i, j = 1,\ldots,n, i \neq k, j \neq k, a'_{ij} = 0, i = k$ или j=k, и если нормализованные собственные векторы уравнений $Aw = \lambda_{\max} w$ и $A'w' = \lambda_{\max} w'$ – соответственно w, w', то $w'_k = 0$, однако $w'_\alpha / w'_\beta \neq w_\alpha / w_\beta$ для всех α и β. Другими словами, исключение одной строки из матрицы парных сравнений не вызывает пропорционального перераспределения весов среди других строк.

Следующая теорема показывает, что отношения порядка между отдельными a_{ij} и w_i / w_j довольно сложным образом зависят от всей матрицы A и ее степеней.

Теорема 29. Для примитивной матрицы A имеем, что $a_{ij} \geq a_{kl}$, тогда и только тогда, когда $w_i / w_j \geq w_k / w_l$, при условии, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{p\neq j} a_{ip}(A^m e)_p}{(A^m e)_j} \geq \lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{q\neq l} a_{kq}(A^m e)_q}{(A^m e)_l}$$

($(\,.)_p$ – означает p-ю компоненту вектора).

Доказательство.

Из равенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = \lambda w_i$ имеем

$$a_{ij} = \lambda w_i / w_j - (1/w_j)\sum_{p\neq j} a_{ip} w_p$$

$$a_{kl} = \lambda w_k / w_l - (1/w_l)\sum_{p\neq l} a_{kq} w_q$$

Поэтому $a_{ij} \geq a_{kl}$ только при

$$\lambda w_i / w_j \geq \lambda w_k / w_l + (1/w_j)\sum_{p\neq j} a_{ip} w_p - (1/w_l)\sum_{p\neq l} a_{kq} w_q \,.$$

Следовательно, теорема верна, если имеет место следующее неравенство:

$$(1/w_j)\sum_{p\neq j} a_{ip} w_p \geq (1/w_l)\sum_{p\neq l} a_{kq} w_q \,.$$

Используя теорему о пределе для примитивной матрицы, заменим каждый w_s на $\lim_{m\to\infty}\frac{(A^m e)_s}{e^T A^m e}$, что завершает доказательство.

Теорема 30. (Степенной закон собственного значения).

Если матрица $A = \left[a_{ij}(w_i / w_j)\right]$ порядка n удовлетворяет обобщенному условию согласованности, то задача о собственном значении $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(w_i / w_j) q_j(w_j) = n q_i(w_i),\, i = 1,\ldots,n$ имеет решение в виде собственного вектора

$$(w_1^{\alpha},\dots,w_n^{\alpha}) \equiv \left[q_1(w_1),\dots,q_n(w_n)\right].$$

Доказательство. Выражение $a_{ij}(w_i / w_j) = g_i(w_i) / g_j(w_j)$ имеет место при решении $g_i(w_i)$, $i=1,..,n$, задачи о собственном значении. Если подставим его в условие согласованности, то получим

$$f\left[g_i(w_i) / g_j(w_j)\right] f\left[g_j(w_j) / g_k(w_k)\right] =$$
$$f\left\{\left[g_i(w_i) / g_j(w_j)\right] f\left[g_j(w_j) / g_k(w_k)\right]\right\}.$$

Или, если положим $x = g_i(w_i) / g_j(w_j)$, $y = g_j(w_j) / g_k(w_k)$, то получим $f(x)f(y)=f(xy)$. Это функциональное уравнение имеет общее решение $f(x) = x^{\alpha}$.

Таким образом, обобщая условие согласованности для A находим, что обобщение соответствующей задачи о собственном значении (с $\lambda_{\max} = n$) возможно, если заменим a_{ij} на постоянную степень a его аргумента. Однако, $a_{ij} = w_i / w_j$ при $a=1$, поэтому, вообще говоря, $a_{ij} = (w_i / w_j)^{\alpha}$, из чего следует, что $g_i(w_i) / g_j(w_j) = (w_i / w_j)^{\alpha}$, $i, j =1,..,n$, $g_i(w_i) = w_i^{\alpha} = g(w_i),\ i = 1,\dots,n$.

Эта теорема показывает, что решение задачи о собственном значении, удовлетворяющей условию согласованности, дает оценки в степенной шкале.

Замечание. Различные матрицы попарных сравнений могут давать один и тот же собственный вектор. Это довольно удачное обстоятельство, так как позволяет заменять признаки и все же получать тот же самый собственный вектор в качестве ответа. Поэтому можно получить один и тот же результат с различных точек зрения и выбрать те матрицы, которые мы предпочитаем.

Теорема 31. Собственные значения положительной обратносимметричной матрицы удовлетворяют следующему уравнению:

$$\sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} \lambda_i \lambda_k = 0.$$

Доказательство.

$\lambda_1+\ldots+\lambda_n = tr(A) = n, \lambda_1{}^2+\ldots+\lambda_n{}^2 = tr(A^2) = n^2$, так как $\lambda_i{}^2$ – собственное значение A^2. Поэтому

$$\lambda_1+\ldots+\lambda_n = tr(A) = n^2 = (\lambda_1+\ldots+\lambda_n)^2 = \sum_{i=1}\lambda_i{}^2 + \sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}\lambda_i\lambda_k,$$

из чего следует, что второе слагаемое справа равно нулю.

Теорема 32. Пусть $A=(a_{ij})$ есть *(nxn)*-матрица положительных элементов с $a_{ij}=a_{ji}{}^{-1}$. A согласованна тогда и только тогда, когда $\lambda_{\max}=n$.

Доказательство. Из уравнения $\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j w_i{}^{-1}$ получаем

$$n\lambda - n = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} a_{ij}w_j w_i{}^{-1} = \sum_{1\le i\le j\le n}(a_{ij}w_j w_i{}^{-1} + w_i w_j{}^{-1}/a_{ij}).$$

Из равенства $a_{ij}=w_i/w_j$ получим $\lambda = n$, а также $\lambda_{\max}=n$, так как сумма собственных значений равна n, следу матрицы A.

Чтобы доказать обратное утверждение, заметим, что предыдущее выражение содержит только два члена, включающих a_{ij}, а именно, $a_{ij}w_j w_i{}^{-1}$ и $w_i w_j{}^{-1}/a_{ij}$. Их сумма имеем вид $y+(1/y)$. Чтобы убедиться в том, что n – минимальное значение $\lambda_{\max}$, достигаемое единственным образом при $a_{ij}=w_i/w_j$, отметим, что для всех этих членов $y+(1/y)>=2$. Равенство достигается только в предположении $y=1$, т.е. $a_{ij}=w_i/w_j$. Поэтому, когда $\lambda_{\max}=n$, имеем

$$n^2 - n \geq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} 2 = n^2 - n$$, откуда следует, что $a_{ij} = w_i / w_j$.

Если A несогласованна, то можно ожидать, что в некоторых случаях из неравенства $a_{ij} \geq a_{kl}$ не следует $w_i w_j \geq w_k w_l$. Однако, поскольку w_i, $i=1,...,n$, определяются значениями строки матрицы A, следует ожидать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 33. (Сохранение порядковой согласованности).

Если $(o_1,\ldots,o_n)$ – порядковая шкала объектов $C_1,\ldots,C_n$, где из $o_i \geq o_k$ следует, что $a_{ij} \geq a_{kj}$, $j=1,...,n$, то из $o_i \geq o_k$ следует, что $w_i \geq w_k$.

Доказательство. Действительно, из $Aw = \lambda_{\max} w$ следует, что

$$\lambda_{\max} w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \geq \sum_{j=1}^{n} a_{kj} w_j = \lambda_{\max} w$$, и поэтому $w_i \geq w_k$.

Теорема 34. Любая положительная обратносимметричная матрица порядка *2*х*2* согласованна.

Теорема 35. Компоненты нормализованного левого собственного вектора обратносимметричной положительной матрицы порядка *3*х*3* являются обратными величинами компонент правого собственного вектора.

5.2 Применение МАИ на практике

5.2.1. Основные виды иерархий

Система – совокупность взаимодействующих частей.

При анализе реальной системы число элементов и их взаимосвязей настолько велико, что превышает способность экспертов воспринимать информацию в полном объеме. В этом случае реальность подразделяется на составные части (кластеры) при помощи иерархии.

Иерархия является определенным типом системы, основанным на предположении, что элементы системы могут группироваться в отдельные множества. Элементы каждой группы находятся под влиянием элементов некоторой вполне определенной группы и, в свою очередь, оказывают влияние на элементы другой группы, но элементы в каждой группе независимы.

Иерархия – система, состоящая из подсистем, функционирующих как целое на одном уровне и являющихся частями системы более высокого уровня, становясь подсистемами этой системы.

В наиболее элементарном виде иерархия строится с вершины (целей – с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии, от которых зависят последующие уровни) к самому низкому уровню (который обычно является перечнем альтернатив). Например, при выборе руководителя предприятия, следует учесть наличие у кандидатов профессиональных и личных качеств, необходимых для избрания на вакантную должность. Этому примеру соответствует иерархия (рис. 1), на первом (высшем) уровне которой находится цель – "Руководитель", на втором шесть факторов, уточняющих цель, и наконец, на последнем уровне три кандидата (К1, К2, К3), которые должны быть оценены по отношению к критериям второго уровня.

Существуют несколько видов иерархий.

Доминантные иерархии – иерархии с основой в вершине (похожи на перевернутое дерево. см. рис. 1).

Холлархии – доминантные иерархии с обратной связью.

Китайский ящик (или модулярные иерархии) – иерархия, растущая в размерах от простейших элементов (внутренние ящики) ко все более крупным совокупностям (внешние ящики).

Иерархия называется *полной*, если каждый элемент заданного уровня функционирует как критерий для всех элементов нижестоящего уровня (рис. 1), в противном случае иерархия неполная.

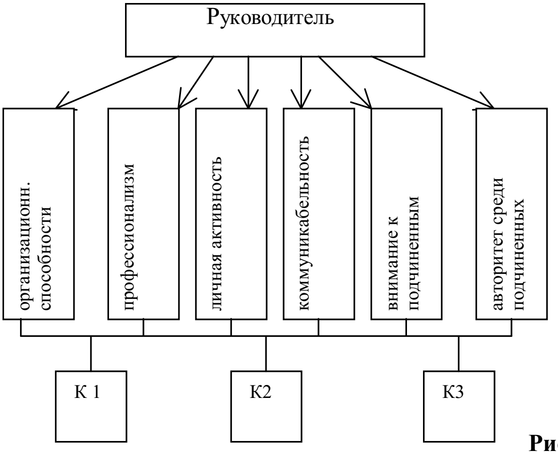


Рис. 1

5.2.2. Построение иерархии

Построение иерархии исходит из естественной способности людей думать логически и творчески, определять события и устанавливать отношения между ними и опирается, таким образом, на принцип идентичности и декомпозиции. На практике не существует установленной процедуры генерирования целей, критериев и видов деятельности для включения в иерархию.

При построении иерархии следует помнить, что основные цели устанавливаются на вершине иерархии, их подцели непосредственно ниже вершины, силы, ограничивающие акторов (действующих лиц) еще ниже. Силы доминируют над уровнем самих акторов, которые, в свою очередь, доминируют над уровнем своих целей, ниже которых будет уровень их возможных действий, и в самом низу находится уровень различных возможных исходов.

Наиболее распространенными типами иерархий являются доминантные иерархии, подразделяющиеся на два типа:

- иерархия прямого процесса, проецирующая существующее состояние проблемы на наиболее вероятное или логическое будущее (условия "сегодняшнего" дня предсказывают то, что будет "завтра"),
- иерархия обратного процесса, определяющая политики управления для достижения желаемого будущего (то, что мы хотим видеть "завтра", определяют нашу политику "сегодня").

Для таких видов иерархий определен наиболее общий порядок их построения.

Иерархия прямого процесса.

1. Макроограничения окружающей среды.
2. Социальные и политические ограничения.
3. Силы.
4. Цели.
5. Акторы.
6. Цели акторов.
7. Политики акторов.
8. Контрастные сценарии.
9. Обобщенный сценарий.

Иерархия обратного процесса

1. Предварительные сценарии.
2. Проблемы и возможности.
3. Акторы и коалиции.
4. Цели акторов.
5. Политики акторов.
6. Отдельные политики управления, влияющие на результат.

Рассмотрим в качестве примера иерархию обратного процесса. Допустим, требуется выбрать сценарий (а исходя из этого и политики управления) для дальнейшего успешного развития института. На предварительный сценарий (общую цель благосостояния учреждения) влияют различные проблемы и силы: администрация института и города, профессорско-преподавательский состав, студенты, шефские организации и т.д. Эти силы определяются различными акторами, у которых имеются свои собственные цели. Наконец, имеется несколько возможных сценариев, определяющих политики управления для достижения благосостояния учреждения. В виду этого получается иерархия рис. 2.

Построенная таким образом иерархия должна быть уточнена и при необходимости изменена и дополнена. Опыт показывает: чем точнее была составлена иерархия, тем меньшие преобразования требуются для дополнения ее новыми элементами.

5.2.3. Матрицы сравнений

В МАИ элементы задачи сравниваются попарно по отношению к их воздействию ("весу" или "интенсивности") на общую для них характеристику. Полученные парные сравнения составляют массив чисел, который оформляется в виде матрицы. Сравнивая набор составляющих проблемы друг с другом, получаем квадратную матрицу. Это обратносимметрич-

ная матрица, т.е. $a_{ji} = \dfrac{1}{aij}$.

Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ – множество из n элементов и $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ – соответственно их веса, или интенсивности. С использованием МАИ сравнивается вес, или интенсивность, каждого элемента с весом, или интенсивностью, любого другого элемента множества по отношению к общему для них свойству или цели. Сравнение весов можно представить в виде матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица может состоять только из одной строки или одного столбца, которые называются векторами.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_n \\
A_1 & \dfrac{w_1}{w_1} & \dfrac{w_1}{w_2} & \dfrac{w_1}{w_3} & \cdots & \dfrac{w_1}{w_n} \\
A_2 & \dfrac{w_2}{w_1} & \dfrac{w_2}{w_2} & \dfrac{w_2}{w_3} & \cdots & \dfrac{w_2}{w_n} \\
A_3 & \dfrac{w_3}{w_1} & \dfrac{w_3}{w_2} & \dfrac{w_3}{w_3} & \cdots & \dfrac{w_3}{w_n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
A_n & \dfrac{w_n}{w_1} & \dfrac{w_n}{w_2} & \dfrac{w_n}{w_3} & \cdots & \dfrac{w_n}{w_n}
\end{array}
$$

Так как, w_1, w_2, $w_{3,\ldots}$ w_n неизвестны заранее, то попарные сравнения элементов производятся с использованием субъективных суждений, численно оцениваемых по шкале.

Когда проблема представлена иерархически, матрица составляется для сравнения относительной важности критериев на втором уровне по отношению к общей цели на первом уровне. Подобные матрицы должны быть построены для парных сравнений каждой альтернативы на третьем уровне по отношению к критериям второго уровня и т.д. Матрица составляется, если записать сравниваемую цель (или критерий) вверху и перечислить сравниваемые элементы слева и сверху. Так, в примере с выбором руководителя (см. рис.1), критерии второго уровня необходимо сравнить попарно по отношению к общей цели первого уровня. Для этого заполняется таблица 1.

Для сравнения кандидатов потребуется уже не одна, а шесть матриц, поскольку необходимо сравнить кандидатов друг относительно друга по каждому качеству руководителя (например, матрица сравнения кандидатов по организационным качествам приведена в таблице 2).

5.4.3. Шкала сравнений

Если бы приходилось сравнивать явления, для которых предусмотрена сложившаяся система измерений (оценка весов камней, длины стержня и т.д.), то в качестве отношений в ячейки таблицы можно было бы заносить отношения действительных мер (длин, весов и т.д.). В случае же экономической, политической и т.д. задач, парные сравнения можно производить с использованием суждений об относительной важности компонентов. Затем эти суждения выражаются численно по специально разработанной шкале относительной важности (табл. 3). Эффективность шкалы доказана теоретически при сравнении со многими другими шкалами.

Сравнение начинают с левого элемента матрицы и определяется насколько он важнее, чем второй. При сравнении элемента с самим собой отношение равно единице. Если первый элемент важнее, чем второй, то используется целое число из шкалы, в противном случае используется обратная величина. В любом случае обратные друг к другу отношения заносятся в симметричные позиции матрицы. Поэтому матрицы всегда

Качества	организац. способности	профессионализм	личная активность	коммуникабельность	внимание к подчиненным	авторитет
организац. способности	1					
профессионализм		1				
личная активность			1			
коммуникабельность				1		
внимание к подчиненным					1	
авторитет						1

Таблица 1

Организац. способности	к1	к2	к3
к1			
к2			
к3			

Таблица 2

Интенсивность относительной важности	Определение
1	равная важность
3	умеренное превосходство одного над другим
5	существенное или сильное превосходство
7	значительное превосходство
9	очень сильное превосходство
2,4,6,8	промежуточные решения между двумя соседними суждениями
Обратные величины приведенных выше чисел	Если при сравнении одного параметра с другим получено одно из вышеуказанных чисел, то при сравнении второго параметра с первым получим обратную величину.

Таблица 3

будут положительными и обратносимметричными, для заполнения которых необходимо произвести только $n(n-1)/2$ суждений, где n – общее число сравниваемых элементов.

Итак, при заполнении матрицы следует руководствоваться правилами:

Правило 1.

Если $a_{ij}=\alpha$, *то* $a_{ji}=1/\alpha$, $\alpha\neq 0$.

Правило 2.

Если суждения таковы, что C_i имеет одинаковую с C_j относительную важность, то $a_{ij}=1$, $a_{ji}=1$; в частности $a_{ii}=1$ для всех i.

Правило 3.

Все ячейки матрицы заполняются значениями одной и той же шкалы.

В качестве примера рассмотрим заполненные матрицы для задачи выбора руководителя (таблицы 4).

матрица приоритетов качеств руководителя						
	орг.спо-соб.	профес сиона-лизм	личная активн.	комму-никаб.	внима-ние к подчи-ненным	автори-тет
орг. способности	1	1/3	3	3	1/2	5
профессионализм	3	1	1/2	1	2	5
личная активность	1/3	2	1	1	3	1/2
коммуникабельность	1/3	1	1	1	1/3	3
внимание к подчиненным	2	1/2	1/3	3	1	1
авторитет	1/5	1/5	2	1/3	1	1

орг.способно сти	к1	к2	к3
к1	1	1/3	1
к2	3	1	1
к3	1	1	1

профессиона лизм	к1	к2	к3
к1	1	1/2	3
к2	2	1	3
к3	1/3	1/3	1

личная активность	к1	к2	к3
к1	1	1/2	1
к2	2	1	1/3
к3	1	3	1

внимание к подчин.	к1	к2	к3
к1	1	1/4	1/2
к2	4	1	1
к3	2	1	1

коммуника-бельность	к1	к2	к3
к1	1	1/3	1/2
к2	3	1	1
к3	2	1	1

авторитет	к1	к2	к3
к1	1	1	1/2
к2	1	1	1
к3	2	1	1

Таблица 4

5.2.5. Согласованность матриц

Для получения результатов, соответствующих действительности в методе анализа иерархий рекомендуется проверять согласованность заполняемых матриц.

Под согласованностью матрицы понимается ее численная (кардинальная $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$) согласованность и транзитивная (порядковая согласованность). Совершенной согласованности трудно достичь при измерении даже наиболее точными инструментами на практике, поэтому нужен способ оценки согласованности. Если при вычислении отклонений от согласованности они будут превышать допустимые пределы, то суждения требуется перепроверить.

Вычисление индекса согласованности (ИС).

1. Суммируется каждый столбец суждений.

2. Сумма первого столбца умножается на величину первой компоненты нормализированного вектора приоритетов (см. вычисление локальных приоритетов), сумма второго столбца на вторую компоненту и т.д.

3. Полученные числа суммируются. Их сумма обозначается λ_{max}.

4. $ИС=(\lambda_{max}.-n)/(n-1)$, где n – число сравниваемых элементов

5. Отношение согласованности ОС=ИС/число случайной согласованности. Случайные согласованности для матриц разного порядка выбираются из таблицы 5.Величина ОС должна быть порядка 10% или меньше, чтобы быть приемлемой. В некоторых случаях можно допустить 20%, но

Размер матрицы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайная согласован ность	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Таблица 5

не более. Если ОС выходит из этих пределов, то участникам нужно дополнительно исследовать задачу и проверить свои суждения.

В примере выбора руководителя при исследовании на согласованность матрицы качеств руководителя (таблица 6) получаем результаты:

λ max 7,7845; ИС 0,3569; ОС 0,2878. Как видим, отношение согласованности достигает 28%, что говорит о желательности пересмотреть суждений по данной матрице. Отношение согласованности аналогично вычисляется и для всех матриц сравнения кандидатов.

В задачах, требующих очень точных результатов (вопрос применения лекарств, выбора лечения и т.д.) необходимо стремиться к высокому уровню согласованности. В задачах же не столь строгих можно ограничиться малой согласованностью.

5.2.6. Синтез приоритетов

Вычисление локальных приоритетов

По заполненным матрицам парных сравнений критериев при последующей математической обработке формируются векторы приоритетов, выражающие относительную силу, величину, желательность, "ценность" каждого отдельного объекта.

Вектор приоритетов – нормализированный главный собственный вектор матрицы. Такие векторы необходимо вычислить для каждой матрицы, причем вычисления можно произвести пятью различными способами:

1. Суммировать элементы каждой строки и нормализовать делением каждой суммы на сумму всех элементов; сумма полученных результатов будет равна единице. Первый элемент результирующего вектора будет приоритетом первого объекта, второй – второго объекта и т.д.

2. Суммировать элементы каждого столбца и получить обратные величины этих сумм. Нормализовать их так, чтобы их сумма равнялась единице, разделить каждую обратную величину на сумму всех обратных величин.

3. Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца (т.е. нормализовать столбец), затем сложить элементы каждой полученной строки и разделить эту сумму на число элементов строки. Это – процесс усреднения по нормализованным столбцам.

4. Умножить n элементов каждой строки и извлечь корень n-ой степени. Нормализовать полученные числа.

5. Возводить матрицу в произвольно большие степени. Вычислять суммы элементов строк и нормализовать полученные суммы.

Наиболее точным является последний способ. Однако без соответствующей компьютерной поддержки он представляет определенную трудность. На практике предпочтительнее третий способ. Рассмотрим его.

Пусть дана матрица A_{nn}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1. Компонента собственного вектора i-й строки вычисляется по формуле - $b_i = \sqrt[n]{a_{i1} \times a_{i2} \times a_{i3} \times \ldots \times a_{in}}$.

2. После того, как получены компоненты собственного вектора для всех n строк $(b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_n)$, производится его нормализация. Для этого вычисляется сумма компонент собственного вектора

$\sum b_i$. Затем каждый элемент $b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_n$ делится на найденную сумму.

Таким образом, получаем нормализованный собственный вектор.

	орг.спо-соб.	профессио нализм	личная активн.	коммуник абель-ность	внима-ние к подчинен ным	авторитет	произведение элементов строки	корень степени n из произведения
орг.способ.	1	1/3	3	3	1/2	5	7,5000	1,3991
профессионализм	3	1	1/2	1	2	5	15,0000	1,5704
личная активн.	1/3	2	1	1	3	1/2	1,0000	1,0000
коммуникабельность	1/3	1	1	1	1/3	3	0,3333	0,8327
внимание к подчиненным	2	1/2	1/3	3	1	1	1,0000	1,0000
авторитет	1/5	1/5	2	1/3	1	1	0,0267	0,5466
							сумма	6,3488
сумма по столбцам	6,8667	5,0333	7,8333	9,3333	7,8333	15,5000		
произведение сумм на элементы вектора приоритетов	1,5132	1,2450	1,2338	1,2241	1,2338	1,3345	λ max	7,7845
							ИС	0,3569
							ОС	0,2878

орг.способ.	к1	к2	к3	произве дение элемен.	корень степени n	вектор приорите тов
к1	1	1/3	1	0,3333	0,6934	0,2211
к2	3	1	1	3,0000	1,4422	0,4600
к3	1	1	1	1,0000	1,0000	0,3189
				сумма	3,1356	

профессион.	к1	к2	к3	произве дение элемен.	корень степени n	вектор приорите тов
к1	1	1/2	3	1,5000	1,1447	0,3325
к2	2	1	3	6,0000	1,8171	0,5278
к3	1/3	1/3	1	0,1111	0,4807	0,1396
				сумма	3,4426	

личная активность	к1	к2	к3	произве дение	корень степени	вектор приорите
к1	1	1/2	1	0,5000	0,7937	0,2552
к2	2	1	1/3	0,6667	0,8736	0,2809
к3	1	3	1	3,0000	1,4422	0,4638
				сумма	3,1095	

внимание к подчин.	к1	к2	к3	произве дение	корень степени	вектор приорите
к1	1	1/4	1/2	0,1250	0,5000	0,1494
к2	4	1	1	4,0000	1,5874	0,4742
к3	2	1	1	2,0000	1,2599	0,3764
				сумма	3,3473	

Таблицы 6, 7

коммуникаб.	к1	к2	к3	произведение	корень степени	вектор приорите
к1	1	1/3	1/2	0,1667	0,5503	0,1692
к2	3	1	1	3,0000	1,4422	0,4434
к3	2	1	1	2,0000	1,2599	0,3874
				сумма	3,2525	

авторитет	к1	к2	к3	произведение	корень степени	вектор приорите
к1	1	1	1/2	0,5000	0,7937	0,2440
к2	1	1	1	1,0000	1,0000	0,3075
к3	2	1	1	2,0000	1,2599	0,3874
				сумма	3,0536	

Таблица 7 (Продолжение)

$$\bar{X} = \overline{\left(\frac{b_1}{\sum b_i}, \frac{b_2}{\sum b_i}, \ldots \frac{b_n}{\sum b_i}\right)} = \overline{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}.$$

В примере с выбором руководителя вычисления проводились четвертым способом и были получены результаты, приведенные в таблицах 6, 7.

Синтез приоритетов

Приоритеты синтезируются, начиная со второго уровня вниз. Локальные приоритеты перемножаются на приоритет соответствующего критерия на вышестоящем уровне и суммируются по каждому элементу в соответствии с критериями, на которые воздействует этот элемент. (Каждый элемент второго уровня умножается на единицу, т.е. на вес единственной цели самого верхнего уровня.) Это дает составной, или глобальный приоритет того элемента, который затем используется для взвешивания локальных приоритетов элементов, сравниваемых по отношению к нему как к критерию и расположенных уровнем ниже. Процедура продолжается до самого нижнего уровня.

В задаче выбора руководителя вторым уровнем являются критерии качеств руководителя (элементы их вектора приоритета умножаются на единицу). Третий уровень иерархии – перечень кандидатов. Каждый элемент этого уровня (относительный вес каждого кандидата по сравниваемому качеству) перемножается на приоритет данного качества среди прочих, затем полученные произведения складываются. В результате получим сводную таблицу 8.

Глобальный приоритет первого кандидата первого кандидата получен как результат вычислений
0,2211*0,2204+0,3325*0,2474+0,2552*0,1575+0,1692*0,1312+0,1494*0,1575+ +0,2440*0,0861=0,2379. Аналогично получены и глобальные приоритеты

других кандидатов.

Вычислив глобальные приоритеты всех кандидатов, делаем вывод о предпочтительности второго кандидата на должность руководителя.

качества руковод.	орг.спо-соб	професси онализм	личная активн.	коммуни-кабель-ность	внимание к подчинен ным	авторитет	обобщен-ные или глобаль-ные приори-теты
кандидаты	0,2204	0,2474	0,1575	0,1312	0,1575	0,0861	
к1	0,2211	0,3325	0,2552	0,1692	0,1494	0,2440	0,2379
к2	0,4600	0,5278	0,2809	0,4434	0,4742	0,3075	0,4355
к3	0,3189	0,1396	0,4638	0,3874	0,3764	0,3874	0,3213

Таблица 8

Библиографический список

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М., 1969. – 368 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., 1967. – 576 с.
3. Мелихов А.Н., Баронец В.Д. Проектирование микропроцессорных средств обработки нечеткой информации. – Ростов н/Д: Издательство Ростовского университета, 1990. – 128 с.
4. Мелихов А.Н., Бернштейн Л.С., Коровин С.Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. Наука, Гл.ред. физ.мат. лит. 1990 – 272 с.
5. Науман Э. Принять решение – но как? Мир, 1987. – 198 с.
6. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. – 194 с.
7. Розен В.В. Цель – оптимальность – решение (математические модели принятия оптимальных решений). – М.: Радио и связь, 1982. – 168 с.
8. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.
9. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991. – 224 с.
10. Трахтенгерц Э.А. Компьютерная поддержка принятия решений: Научно-практическое издание. Серия "Информатизация России на пороге XXI века". – М.: СИНТЕГ, 1998. – 376 с.